

## Stochastik III - Übungsblatt 6

Abgabe: 09. 01. 2013 vor Beginn der Übung

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei ein lineares Modell  $Y = X\beta + \epsilon$  gegeben, wobei  $X$  eine  $n \times m$  - Matrix mit  $rg(X) = r < m$  ist. Sei  $a \in \mathbb{R}^m$ . Zeigen Sie, dass die Funktion  $a^\top \beta$  genau dann erwartungstreu schätzbar ist, wenn gilt:  $a^\top X^- X = a^\top$ .

### Aufgabe 2 (4 + 5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes lineares Modell:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3$  erwartungstreu schätzbar ist.  
(b) Bestimmen Sie den besten linearen erwartungstreuen Schätzer für  $\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3$ .

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Modell  $Y = X\beta + \epsilon$  mit  $Y \in \mathbb{R}^6$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^6$ ,  $\mathbb{E}\epsilon = 0$ ,  $\mathbb{E}(\epsilon_i \epsilon_j) = \delta_{ij} \sigma^2 > 0$ , wobei  $\sigma^2 > 0$  und

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge aller erwartungstreu schätzbaren Funktionen gegeben ist durch

$$\{(a_1 + a_2 + a_3)\beta_1 + a_1\beta_2 + a_2\beta_3 + a_3\beta_4 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

### Aufgabe 4 (3 + 2 + 3 Punkte)

Auf der Homepage der Vorlesung befindet sich die Datei `medikamente.txt`, die folgende Struktur hat:

Wirkungszeit in h	Verabreichung Medikament A	Verabreichung Medikament B
0.98	1	0
1.08	1	0
1.55	0	1
...	...	...

Die Verabreichung der Medikamente wurde wie folgt kodiert:

- 0: Medikament wurde nicht verabreicht

- 1: Medikament wurde verabreicht

Für die Daten soll ein lineares Modell mit normalverteilten Störgrößen verwendet werden, wobei die Wirkungszeit die Zielvariable ist.

- Welche erwarteten Wirkungszeiten haben die Medikamente A und B?
- Weisen Sie nach, dass die Koeffizienten  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  nicht erwartungstreu schätzbar sind.
- Weisen Sie nach, dass die Linearkombination  $\beta_2 - \beta_3$  erwartungstreu schätzbar ist.

Hinweis: Zur Berechnung der verallgemeinerten Inversen kann `ginv()` im Paket MASS verwendet werden.



*Frohe Weihnachten und einen guten  
Rutsch ins Jahr 2013!*