Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. D. Neuhäuser

WS 2012/2013
23. 01. 2013

Stochastik III - Übungsblatt 8

Abgabe: 06. 02. 2013 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (6 + 2 + 3 Punkte)
In einer biologischen Studie wurde das Gewicht (in Gramm) von 20 Ratten ermittelt.

356.4	362.5	394.7	356.0	387.6
305.1	385.1	383.2	346.6	314.2
394.8	370.8	434.2	365.2	377.1
365.9	384.4	297.4	404.3	412.0

(a) Es sei von der Rattenart bekannt, dass das Gewicht üblicherweise normalverteilt ist, mit Mittel $\mu_0 = 370$ Gramm und Standardabweichung $\sigma_0 = 27$ Gramm. Testen Sie unter Verwendung des Kolmogrow-Smirnow-Tests aus der Vorlesung zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob das Gewicht der Tiere aus obiger Stichprobe $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ - verteilt ist. Es ist $s_{20,0.95} = 1.315$.

(b) Plotten Sie die empirische Verteilungsfunktion und die Verteilungsfunktion der Normalverteilung aus Teil a) in ein Schaubild.

(c) Sei $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ die Normalverteilungsfamilie. Testen Sie die Hypothese, dass die gemessenen Daten normalverteilt sind, d.h.

$$H_0 : P \in \mathcal{N} \quad \text{vs.} \quad H_1 : P \notin \mathcal{N}$$

mit dem modifizierten Kolmogorow-Smirnow-Test (Lilliefors-Test) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$. Die modifizierte Kolmogorow-Smirnow-Teststatistik $\widetilde{T}_n$ ist dabei gegeben durch

$$\widetilde{T}_n = \left(1 - \frac{1}{100\sqrt{n}} + \frac{85}{100n}\right) \sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_n(t; x_1, \ldots, x_n) - F_0^*(t) \right|,$$

wobei F_0^* die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit aus den Daten geschätztem Erwartungswert und geschätzter Varianz ist. Benutzen Sie als Schätzer das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ und die Stichprobenvarianz S^2. Folgende Tabelle enthält die kritischen Werte $c_n(\alpha)$ der modifizierten KS-Teststatistik $\widetilde{T}_n$ für $n = 20$ mit $P\left(\widetilde{T}_n \geq c_n(\alpha)\right) \approx \alpha$.

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
$c_{20}(\alpha)$	0.775	0.819	0.895	0.995	1.035

Hinweis: Verwenden Sie nicht das Paket *nortest*. Die Werte können Sie wie immer auch auf der Vorlesungshomepage runterladen.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)
Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge von unabhängigen und identisch $Bin(1, p)$ - verteilten Zufallsvariablen mit $p \in (0, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilung von $D_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_n(t; x_1, \ldots, x_n) - F_0(t) \right|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ von p abhängt.

(b) Zeigen Sie, dass auch die asymptotische Verteilung von $\sqrt{n}D_n$ von p abhängt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Mit Hilfe des χ^2–Anpassungstests von Pearson soll überprüft werden, ob die Anzahl der Anrufe in der Telefonzentrale eines Hotels im Verlauf von 15 Minuten Poisson–verteilt ist mit Parameter $\lambda = 3$. Der Test soll zum Niveau $1 - \gamma = 0.01$ durchgeführt werden. Beobachtet wurden die Anzahlen der Anrufe in $n = 50$ Zeitintervallen a 15 Minuten.

Anzahl k der Anrufe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>10
Anzahl der Zeitintervalle mit k Anrufen	1	6	8	10	6	6	7	1	1	2	2	0

Wählen Sie die Klasseneinteilung so, dass $np_{0,j} \geq 8$ für jedes $j = 1, \dots, r$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Der Biologe Gregor Mendel (1822 - 1884) erhielt bei einem Kreuzungsversuch mit Erbsen folgendes Resultat:
315 runde gelbe Erbsen, 108 runde grüne Erbsen, 101 kantige gelbe Erbsen, 32 kantige grüne Erbsen.
Widerspricht das Ergebnis seiner Theorie, wonach sich die vier Anzahlen wie $9 : 3 : 3 : 1$ verhalten müssten? Führen Sie einen statistischen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.