

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 10

Abgabe am 18. 01. 2013 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

(a) In einer Klausur seien folgende Ergebnisse in Punkten erzielt worden:

56 46 77 43 78 54 58 41 34 46

Bestimme für diese Stichprobe das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz.

(b) Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige Stichprobenvariablen, wobei $X_i \sim U([a, a + 2])$, $i = 1, \dots, n$. Betrachte die Stichprobenfunktion $\hat{a} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $\hat{a}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n - 1$ definiert ist. Ist \hat{a} ein erwartungstreuer Schätzer für a ? Ist \hat{a} asymptotisch erwartungstreu?

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)

Bestimme mit der Momentenmethode und mit der Maximum-Likelihood-Methode Schätzer für die folgenden Modellparameter der Verteilung von X

- (a) λ , falls $X \sim \text{Poi}(\lambda)$,
- (b) θ , falls X absolutstetig verteilt ist mit Dichte $f(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{1}_{(0,\theta]}(x)$,
- (c) β , falls X absolutstetig verteilt ist mit Dichte $g(x) = \beta x^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$.

Hinweise:

- Aus Vorlesungen, Übungen und Tutorien schon bekannte Formeln für Erwartungswerte müssen hier nicht noch einmal hergeleitet werden.
- Betrachte die Loglikelihood-Funktion.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer bestimmten Sorte von Glühbirnen durch eine Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_{\theta}(x) = 2\theta x \exp(-\theta x^2) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0,$$

beschrieben werden kann.

- (a) Bestimme mit der ML Methode einen Schätzer für θ .
- (b) Berechne den Wert des ML-Schätzers bei folgender konkreten Stichprobe von Brenndauern (in Stunden): 1530, 1173, 1832, 1075, 1539, 998, 2083, 693, 2529, 1693, 1325, 1298, 1743, 1432, 1487.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Anzahl der Schadensfälle eines Versicherungsportfolios pro Jahr in 8 Bezirken sei jeweils Poisson-verteilt mit den Parametern

$$\lambda_1 = 0,1; \lambda_2 = 0,2; \lambda_3 = 0,4; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = 1,5; \lambda_6 = 2; \lambda_7 = 4; \lambda_8 = 10.$$

Du findest eine Akte mit den Zahlen aus 10 Jahren, nämlich

$$0 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad \text{bzw.} \quad 0$$

Schadensfälle. Bestimme mit der ML-Methode, aus welchem Bezirk die Akte vermutlich stammt.