Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche

WS 2012/2013
18. 01. 2013

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 11

Abgabe am 25. 01. 2013 **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (4+4+4(Bonus) Punkte)
Bestimme mit der Momentenmethode und mit der Maximum-Likelihood-Methode Schätzer für die folgenden Modellparameter der Verteilung von X

(a) q, falls $X \sim \text{Geo}(q)$ (Hinweis: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{q}$),

(b) k, falls X absolutstetig verteilt ist mit Dichte $f(x) = k\,(\frac{1}{x})^{k+1}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$,

(c) a, falls $X \sim \text{U}(-a, a)$.

Hinweise:

- Aus Vorlesungen, Übungen und Tutorien schon bekannte Formeln für Momente müssen hier nicht noch einmal hergeleitet werden.
- Betrachte die Loglikelihood-Funktion.
- Eventuell muss auch das zweite Moment betrachtet werden.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Bestimme den Erwartungswert $\mathbb{E}\,U_r$, falls $U_r \sim \chi^2_r$

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Stichprobenvariablen mit $X_1 \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Zeige, dass $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma} \sim \text{N}(0,1)$.

Hinweise:

- Es ist nicht nötig die Dichte der χ^2_r-Verteilung zu benutzen.
- Verwende die aus den Übungen bekannten Eigenschaften der Normalverteilung.

Aufgabe 3 (4+2+2 Punkte)
12 Versuchsflächen wurden mit einer neuen Weizensorte bestellt. Diese Flächen erbrachten folgende Erträge (in Tonnen):

35.6	33.7	37.8	31.2	37.2	34.1	35.8	36.6	37.1	34.9	35.6	34.0

Aus Erfahrung ist bekannt, dass die Erträge als Realisierungen unabhängiger, $\text{N}(\mu, 3.24)$-verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können.

(a) Gib für den Erwartungswert μ ein konkretes Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma_1 = 0.95$ bzw $\gamma_2 = 0.99$ an.

(b) Wie verändert sich die Länge des Konfidenzintervalls, wenn sich das Niveau von γ_1 auf γ_2 erhöht? Wie würdest du das intuitiv erklären?

(c) Wie viele Versuchsflächen werden benötigt, damit die Länge des Konfidenzintervalls zum Niveau 0.95 kleiner oder gleich 1.5 ist?

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

Du stellst bei dem Kaffeeautomaten bei der Cafete Süd fest, dass die ausgegebene Menge immer ein wenig variiert. Bei 5 Tassen misst du mal nach und erhältst die Füllmengen (in ml)

$$299,7 \qquad 298,5 \qquad 301,0 \qquad 293,9 \qquad 309,3.$$

Vom Cafete-Personal erfährst du, dass die Füllmengen unabhängig und normalverteilt sind, wobei die Standardabweichung 5ml beträgt. Der Erwartungswert ist leider niemandem bekannt.

(a) Berechne ein Konfidenzintervall für die erwartete Füllmenge des Kaffeeautomaten zum Niveau $\gamma_1 = 0,95$.

(b) Du bist enttäuscht, dass dein Konfidenzintervall solch eine große Länge hat und entschließt dich daher das in *a*) betrachtete Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma_2 = 0.9$ zu berechnen. Da dieses aber immer noch zu lang ist, beginnst du, die Standardabweichung der Füllmenge anzuzweifeln. Wie hoch dürfte die Standardabweichung der Füllmenge des Kaffeeautomaten höchstens sein, damit die Länge des Konfidenzintervalls (zum Niveau $\gamma_2 = 0.9$) 5ml nicht überschreitet?

Wichtige Quantile der Standardnormalverteilung:

γ	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
z_γ	0.67	0.86	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58