

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 12

Abgabe am 01. 02. 2013 vor Beginn der Übung

- Übungsblatt 12 ist das letzte Blatt, auf das es Übungspunkte gibt
- Um an der Klausur teilnehmen zu können, sind insgesamt 158 Übungspunkte nötig
- Bitte bis zum 4.2. im Hochschulportal zur Vorleistung anmelden
- Betrachte im Folgenden stets symmetrische Konfidenzintervalle, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

Eine Wetterstation will die lokale Niederschlagsmenge (in mm) für den Monat April des laufenden Jahres prognostizieren. Es sei bekannt, dass die Niederschlagsmenge für den Monat April der vergangenen n Jahre durch eine Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ modelliert werden kann, wobei μ und σ^2 unbekannt sind.

- Bestimme die Länge des Konfidenzintervalls für μ zum Niveau γ . Wie groß ist die erwartete Länge des Konfidenzintervalls, falls zusätzlich bekannt ist, dass $\mathbb{E}S_n = 6n$?
- Sei (x_1, \dots, x_{31}) eine Messreihe von Niederschlagsmengen für den Monat April der vergangenen 31 Jahre mit $\bar{x}_{31} = 53,68$ und $s_{31}^2 = 6,13^2$. Bestimme ein konkretes Konfidenzintervall für μ zum Niveau $\gamma = 0,98$.

Aufgabe 2 (3+2+2 Punkte)

Eine Maschine, die in einer Brauerei zur Abfüllung von Flaschen eingesetzt wird, sei auf die Standard-Füllmenge μ eingestellt. Bei der Messung der Biermengen in 10 abgefüllten Flaschen ergaben sich die folgenden Werte (in Liter):

0,329 0,339 0,331 0,324 0,328 0,327 0,334 0,336 0,332 0,326

Die Messwerte können dabei als Realisierungen von unabhängigen und identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen betrachtet werden.

- Es sei μ unbekannt. Bestimme ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter σ^2 zum Niveau $\gamma = 0,8$.
- Im Folgenden sei nun bekannt, dass $\mu = 0,33\ell$. Bestimme ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter σ^2 zum Niveau $\gamma = 0,95$.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass in eine zufällig ausgewählte Flasche nicht mehr als $0,32\ell$ Bier abgefüllt werden, unter der Annahme, dass der Parameter σ^2 genau in der Mitte des in (b) berechneten konkreten Intervalls liegt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachte die folgenden Stichproben von bei zwei Personengruppen A und B gemessenen IQ.

A	86	101	93	98	98	89	101	100	104	95	99
B	101	99	97	96	99	103	113	106	97	113	

Betrachte zudem die Stichprobe A als Realisierungen von $N(\mu_A, \sigma^2)$ -verteilten Stichprobenvariablen und die Stichprobe B als Realisierungen von $N(\mu_B, \sigma^2)$ -verteilten Stichprobenvariablen, wobei $\sigma^2 = 36$, und angenommen wird, dass sämtliche Stichprobenvariablen unabhängig sind. Kann man mit 95-prozentiger Sicherheit sagen, dass sich der erwartete IQ in den beiden Gruppen unterscheidet? Begründe deine Entscheidung!

Aufgabe 4 (3+2+2 Punkte)

Es seien X_1, X_2, \dots unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim U(a - 1, a + 1)$ für alle $i = 1, 2, \dots$ und ein unbekanntes $a > 0$.

- Konstruiere ein asymptotisches Konfidenzintervall für a zum Niveau γ .
- Wie groß müsste der Stichprobenumfang mindestens sein, damit das in (a) bestimmte Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0,9$ höchstens die Länge 0,1 hat?
- Gegeben sei folgende Stichprobe: 2,04; 2,78; 1,77; 1,00; 2,55; 2,45. Wie lautet das in (a) betrachtete asymptotische Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0,9$ nun konkret? Berechne auch seine Länge.

Wichtige Quantile der Standardnormalverteilung:

γ	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
z_γ	0.67	0.86	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Wichtige Quantile der t-Verteilung:

		γ				
	$t_{n,\gamma}$	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
n	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750

Wichtige Quantile der χ^2 -Verteilung:

		γ									
	$\chi^2_{n,\gamma}$	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
n	8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
	9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
	10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
	11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76