

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 5

Abgabe am 23. 11. vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte)

Ein Computerunternehmen stellt fest, dass sich die Lebensdauer (in Wochen) von produzierten Monitoren durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda > 0$ beschreiben lässt.

- (a) Bestimme die Verteilungsfunktion F_X von X .
- (b) Das Computerunternehmen nimmt an, dass λ den Wert $1/300$ hat. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
 - (i) ein Monitor vor dem Zeitpunkt $t_1 = 200$ Wochen nicht ausfällt,
 - (ii) ein Monitor vor dem Zeitpunkt $t_2 = 100$ Wochen ausfällt,
 - (iii) ein Monitor zwischen den Zeitpunkten $t_3 = 200$ Wochen und $t_4 = 300$ Wochen ausfällt.
- (c) Wie muss der Parameter λ gewählt werden, damit mit Wahrscheinlichkeit $0,9$ die Lebensdauer eines Monitors mindestens 50 Wochen beträgt?

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte)

Ein Student der Wirtschaftswissenschaften schreibt einen kleinen Test. Dieser Test besteht aus zwei Aufgaben, in denen 2 bzw. 3 Punkte erreicht werden können. Betrachte die Zufallsvariablen X und Y , die die erreichten Punkte des Studenten in Aufgabe 1 bzw. Aufgabe 2 modellieren. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Zufallsvektors (X, Y) und die Randwahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y an.

		y				
		0	1	2	3	
x	0	a	0,05	0,03	0,02	?
	1	0,04	0,07	0,07	b	?
	2	0,06	0,08	0,09	c	0,51
$P(Y = y)$		0,2	d	0,19	0,41	

- (a) Berechne die fehlenden Werte a, b, c und d .
- (b) Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X .
- (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
 - der Student im Test insgesamt genau 2 Punkte erzielt,
 - der Student im Test insgesamt mindestens 3 Punkte erzielt.

Aufgabe 3 (4+3 Punkte)

- (a) Ein Würfel wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X gebe an, wie oft die Augenzahl kleiner oder gleich 2 ist. Bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion von X .
- (b) Die Zufallsvariable Y habe die Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Skizziere F_Y und berechne $P(-1 \leq Y \leq -0.5)$, $P(Y = 0)$ und $P(Y > 1)$.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte)

Nach jahrelanger Erfahrung hat Unternehmensberater S. Schwafel herausgefunden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Bonuszahlung durch seinen Arbeitgeber von der Anzahl der durch ihn beratenen Kunden abhängt. Es wird immer mindestens ein Kunde durch Schwafel beraten. Dabei hat er beobachtet, dass folgende Zusammenhänge gelten:

- Wenn nur ein Kunde beraten wird, liegt die Wahrscheinlichkeit für den Bonus bei 0, 1.
- Wenn zwei Kunden beraten werden, liegt die Wahrscheinlichkeit für den Bonus bei 0, 3.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei Kunden beraten werden und gleichzeitig ein Bonus gezahlt wird beträgt 0, 3 .

Ferner weiß Schwafel, dass mit Wahrscheinlichkeit 0, 2 ein Kunde beraten wird, mit Wahrscheinlichkeit 0, 3 zwei Kunden beraten werden und mit Wahrscheinlichkeit 0, 5 mehr als zwei Kunden beraten werden.

- (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Bonuszahlung, wenn mehr als zwei Kunden beraten werden.
- (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Schwafel eine Bonuszahlung erhält.
- (c) Angenommen, Schwafel erhält eine Bonuszahlung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nur einen Kunden beraten?

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeige die Eigenschaft der sogenannten "Gedächtnislosigkeit" der Exponentialverteilung, d.h., zeige, dass für $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ folgende Identität gilt:

$$P(X > x + t | X > x) = P(X > t) \quad \forall x, t \geq 0$$