Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche

WS 2012/2013
23. 11. 2012

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 6

Abgabe am 30. 11. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Auf einer Prüfstation werden Produkte getestet. Wird ein Fehler festgestellt, so wird das Produkt aussortiert. Es ist bekannt, dass ein Produkt mit Wahrscheinlichkeit $0,2$ einen Fehler hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes Produkt aussortiert wird beträgt $0,95$, allerdings werden auch fehlerfreie Produkte mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,01$ aussortiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein aussortiertes Produkt fehlerfrei?

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)

(a) Es werden nacheinander zwei Münzen geworfen. Die Ereignisse A, B, C und D seien gegeben durch

- A : die zuerst geworfene Münze zeigt Kopf
- B : es erscheint mindestens einmal Kopf
- C : es erscheint mindestens einmal Zahl
- D : die zweite Münze zeigt Kopf

Überprüfen Sie, ob folgende Ereignisse unabhängig sind (mit Begründung):
(i) A und C; (ii) A und D; (iii) B und C; (iv) B und D

(b) Seien A und B zwei stochastisch unabhängige Ereignisse. Zeige, dass dann auch A^c und B^c stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 3 (2+2+1 Punkte)

Die Ratingagentur Poody's soll die Kreditwürdigkeit eines Unternehmens bewerten. Das Ergebnis wird als Zufallsvektor (X, Y) modelliert, wobei $X : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ den Ausblick (negativ, gleich bleibend oder positiv) für die Entwicklung des Unternehmens und $Y : \Omega \to \{1, 2, 3\}$ die Bewertung des Unternehmens angibt. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von (X, Y) sei gegeben durch

$$p(x, y) = \frac{1}{12}(x^2 y + x) \qquad \text{für } x \in \{-1, 0, 1\},\ y \in \{1, 2, 3\}.$$

(a) Berechne die Randwahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ...

  (i) ... das Unternehmen mit einer 2 bewertet wird unter der Bedingung, dass es einen positiven Ausblick erhalten hat.

  (ii) ... das Unternehmen einen negativen Ausblick erhält unter der Bedingung, dass es mit einer 1 bewertet wurde.

(c) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 4 (2+2(Bonus)+1,5+1,5 Punkte)
Ein IT-System bestehe aus zwei Komponenten mit zufälligen Lebensdauern X und Y. Der Zufallsvektor (X, Y) sei dabei absolutstetig verteilt mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x \exp(-x(y+1)) \text{ für } x > 0, y > 0\,, \\ 0 \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Bestimme die Randdichte $f_X(x)$ von X.

(b) Zeige, dass die Randdichte $f_Y(y)$ von Y durch $f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$ gegeben ist.

(c) Sind X und Y unabhängig?

(d) Bestimme die bedingte Dichte von Y unter der Bedingung $\{X = \lambda\}$ für $\lambda > 0$.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)

(a) Sei X normalverteilt mit Parametern μ und σ^2 (Schreibweise: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$). Zeige, dass die Zufallsvariable $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt ist ($Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$).

(b) Der Inhalt einer bestimmten Sorte Farbdosen sei auf dem Etikett mit 1000g Farbe angegeben. Die Abfüllmaschine kann diese Menge jedoch nicht exakt abfüllen, so dass die tatsächlich abgefüllte Menge (in Gramm) normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 1000$ und $\sigma^2 = 100$. Die verwendeten Dosen können höchstens 1020g Farbe fassen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dose beim Abfüllen überläuft.

Hinweise: Zu (a): Y ist eine lineare Transformation von X.
Zu (b): Die Verteilungsfunktion F einer normalverteilten Zufallsvariable X lässt sich nicht als geschlossene Formel angeben. Deswegen transformiert man X in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Y (wie in Aufgabenteil (a)). Die Verteilungsfunktion Φ von Y ist dann in Tabellenform gegeben. Diese Tabelle steht auf der Homepage der Veranstaltung zum Download bereit.