Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche

WS 2012/2013
30. 11. 2012

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 7

Abgabe am 7. 12. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

(a) Sei $U \sim \mathrm{U}(0,1)$. Bestimme die Verteilungsfunktion von $V = -\frac{1}{\lambda}\log(U)$ für $\lambda > 0$. Wie nennt man die Verteilung von V?

(b) Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{3}{4}x^2(2-x), & 0 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Bestimme die Dichte von $Y = X^2$.

(c) Seien Z_1 und Z_2 unabhängige Zufallsvariablen mit $Z_1, Z_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ wobei $\lambda > 0$. Bestimme die Dichte von $Z = Z_1 + Z_2$.

Aufgabe 2 (1,5+3,5 Punkte)

Ein Unternehmen beteiligt sich an einer Ausschreibung für ein Projekt, welches 5 Teilleistungen beinhaltet, deren Kosten $K_1, \ldots, K_5$ (in Euro) noch von zukünftigen Energiepreisen, Tarifabschlüssen usw. abhängen. Die Kosten K_i werden als normalverteilt ($K_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$) und unabhängig angenommen, wobei von folgenden Parametern ausgegangen werden kann:

i	1	2	3	4	5
μ_i	10^6	$2 \cdot 10^6$	10^6	10^6	$2 \cdot 10^6$
σ_i^2	10^{10}	10^{10}	10^{10}	10^{10}	10^{10}

Das Unternehmen hat mit seinem Angebotspreis von 9.000.000 (Euro) den Zuschlag erhalten.

(a) Bestimme die Verteilung des Gewinns $X = 9.000.000 - (K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5)$.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn X größer als 2.000.000 ausfällt und die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn X kleiner als 1.500.000 ausfällt.

Hinweis: Nutze folgende Eigenschaften der Normalverteilung:

- Wenn $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind mit $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, dann ist $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$.
- Wenn $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ und $a \neq 0$, dann ist $aX \sim \mathrm{N}(a\mu, a^2\sigma^2)$.
- Wenn $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ und $b \in \mathbb{R}$, dann ist $X + b \sim \mathrm{N}(\mu + b, \sigma^2)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Getreu einer Just-in-Time-Devise, gemäß der die Zulieferer flexibel und kurzfristig reagieren sollen, hält ein PKW-Produzent nur eine geringe Anzahl von Anlassern auf Lager. Bei Bedarf wird dem Zulieferer eine telefonische Order übermittelt. Spätestens 10 Stunden nach der Bestellung sind die Anlasser dann im Werk. Innerhalb dieser 10 Stunden schwankt die tatsächliche Lieferzeit X gemäß der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{x}{50}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X.

Aufgabe 4 (2+2+2+2+2 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable. Berechne den Erwartungswert von X, falls

(a) X diskret verteilt ist mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(-1) = 0,2$; $p(0) = 0,16$; $p(1) = 0,05$; $p(2) = 0,18$; $p(3) = 0,32$; $p(4) = 0,09$.

(b) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) X absolutstetig verteilt ist mit Dichte $f(x) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbb{1}_{(0,\theta]}(x)$ und Parameter $\theta > 0$.

(d) $X \sim \mathrm{U}[a, b]$ mit Parametern $a < b$ (Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$).

(e) X absolutstetig verteilt ist mit Dichte $g(x) = k\,(\frac{1}{x})^{k+1}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ und Parameter $k > 1$.

Hinweis: Benutze, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

Betrachte das sogenannte *Sankt-Petersburger Spiel*: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal "Kopf" fällt. Wird im ersten Wurf "Zahl" geworfen, erhält der Spieler 1 Euro, für jedes weitere Mal "Zahl" wird der Gewinn verdoppelt, d.h. wird einmal "Zahl" geworfen erhält man 1 Euro, bei zweimal "Zahl" erhält man 2 Euro, bei dreimal "Zahl" erhält man 4 Euro, bei viermal "Zahl" 8 Euro und so weiter. Wird "Kopf" geworfen, ist das Spiel sofort beendet und der Spieler bekommt seinen Gesamtgewinn X ausgezahlt. Würdest du 100 Euro für die Teilnahme an dem Spiel bezahlen? Wie viel Geld wärst du bereit für die Teilnahme an dem Spiel zu zahlen? Berechne dazu den Erwartungswert des Gewinns X.