Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche

WS 2012/2013
7. 12. 2012

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 8

Abgabe am 14. 12. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)
Es sei X eine Zufallsvariable. Berechne das 2. Moment und die Varianz von X, falls

(a) X diskret verteilt ist mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(-1) = 0,2$; $p(0) = 0,16$; $p(1) = 0,05$; $p(2) = 0,18$; $p(3) = 0,32$; $p(4) = 0,09$.

(b) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) X absolutstetig verteilt ist mit Dichte $f(x) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbb{1}_{(0,\theta]}(x)$ und Parameter $\theta > 0$.

(d) $X \sim \mathrm{U}[a, b]$ mit Parametern $a < b$ (Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$).

(e) X absolutstetig verteilt ist mit Dichte $g(x) = k\,(\frac{1}{x})^{k+1}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ und Parameter $k > 2$.

Hinweis: Benutze, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nutze außerdem, dass für alle Verteilungen auf Blatt 7 der Erwartungswert berechnet wurde.

Aufgabe 2 (2+2+4+1 Punkte)
Zwei Angestellte fahren jeden Vormittag mit dem Auto zur Arbeit. Je nach Verkehrslage benötigen beide unterschiedlich viel Zeit für den Weg. Die Zufallsvariablen $X : \Omega \to [0, 1]$ und $Y : \Omega \to [1, 2]$ modellieren die Dauer in Stunden, die beide für den Weg zur Arbeit brauchen. Die gemeinsame Dichte von X und Y sei wie folgt gegeben:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \left[\frac{3}{2}x^2\,y + \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}x^2\right]\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[1,2]}(y).$$

(a) Zeige, dass die Randdichten von X und Y durch $f_X(x) = (1.5x^2 + \frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ und $f_Y(y) = (y - \frac{1}{2})\mathbb{1}_{[1,2]}(y)$ gegeben sind.

(b) Berechne die erwartete (addierte) Gesamtdauer in Stunden die beide Angestellte für den Weg zur Arbeit benötigen.

(c) Berechne den Korrelationskoeffizienten von X und Y und die Varianzen von $X - 6$ und $3Y$.

(d) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Ein Anleger verfügt am Beginn einer Periode über 100 000 Euro. Er investiert 60 000 in eine Anlagemöglichkeit, die eine zufallsabhängige Rendite X mit $\mathbb{E}X = 0.08$ und $\mathrm{Var}X = 0.0004$ besitzt. Die restlichen 40 000 legt er zur zufallsabhängigen Rendite Y mit $\mathbb{E}Y = 0.06$ und $\mathrm{Var}Y = 0.0001$ an. Berechne den Erwartungswert und die Varianz des Vermögens Z am Ende der Periode, wenn X und Y

(a) unabhängige Zufallsvariablen sind,

(b) den Korrelationskoeffizienten -0.3 besitzen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Je nachdem, ob der erwartete Gewinn bei einem Glücksspiel kleiner, gleich oder größer ist als Null, wird das Spiel als unvorteilhaft, fair oder vorteilhaft bezeichnet. Betrachte folgendes Spiel: Eine Münze wird viermal geworfen. Falls viermal die gleiche Seite der Münze oben liegt, bekommst du 20 Euro ausbezahlt. Falls genau dreimal die gleiche Seite oben liegt, bekommst du 15 Euro. Andernfalls erhältst du keine Auszahlung. Entscheide, ob dieses Spiel unvorteilhaft, fair oder vorteilhaft ist, wenn du für jedes Spiel 5 Euro zahlen musst. Begründe deine Aussage.