Prof. Dr. Volker Schmidt | WS 2012/2013
Björn Kriesche | 14. 12. 2012

Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler - Übungsblatt 9

Abgabe am 11. 01. 2013 **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (1,5+3+4,5+3(Bonus) Punkte)

Zur Ermittlung eines Konjunkturindex wird ein Fragebogen an deutsche Manager geschickt. Der Bogen besteht aus zwei Fragen, die jeweils mit "negativ" (-1), "neutral" (0) oder "positiv" (1) beantwortet werden können. Betrachte den Zufallsvektor (X, Y), wobei X und Y die zufälligen Antworten auf beide Fragen modellieren. (X, Y) habe folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

		y			
	$P(X = x, Y = y)$	-1	0	1	$P(X = x)$
	-1	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	
x	0	$\frac{5}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{3}{32}$	
	1	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	
	$P(Y = y)$				

(a) Weise nach, dass die in der Tabelle gegebene Funktion tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellt.

(b) Berechne die Randwahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y und berechne und skizziere die Verteilungsfunktion von X. Beachte: Die Verteilungsfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(c) Berechne den Erwartungswertvektor μ und die Kovarianzmatrix K von (X, Y). Sind X und Y unabhängig?

(d) Zeige, dass X^2 und Y^2 unabhängig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachte das Zufallsexperiment n-maliger Würfelwurf. Die Zufallsvariable X_i gebe die Augenzahl beim i-ten Wurf an, $i = 1, \ldots, n$. Schätze die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right), \qquad \epsilon > 0\,,$$

mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung nach oben ab.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Bei einer Fluggesellschaft weiß man, dass Personen, die sich einen Platz für einen Flug auf einer bestimmten Route reservieren lassen, mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,18$ nicht zum Abflug erscheinen. Um die Zahl der ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen 220-sitzigen Jet mehr als 220 Platzreservierungen vorgenommen.

(a) Berechne die approximative Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle zum Abflug erscheinenden Personen, für die ein Platz reserviert wurde, auch einen Platz erhalten, wenn 240 Platzreservierungen vorgenommen werden. Dabei nehme man an, dass die Entscheidungen darüber ob die einzelnen Reservierungen wahrgenommen werden sollen, individuell (unabhängig) zustande kommen.

(b) Wieviele Platzreservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende approximative Wahrscheinlichkeit mindestens 99% beträgt.

Hinweise:

- Überlege, welche Verteilung die Anzahl der zum Abflug erscheinenden Personen hat.
- Eine Zufallsvariable $X \sim$ Bin(n,p) kann dargestellt werden als $X = X_1 + \ldots + X_n$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind und $X_i \sim \text{Bin}(1, p)$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
- Benutze den zentralen Grenzwertsatz.
- Es gilt $\Phi(2,33) = 0,99$, d.h. $2,33 = \Phi^{-1}(0,99)$.

Aufgabe 4 (1,5+2+2,5 Punkte)
Eine Versicherung weiß, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde innerhalb eines Jahres einen Schaden meldet, ungefähr 0,01 beträgt, und dies von Kunde zu Kunde unabhängig geschieht. Berechne

(a) exakt,

(b) approximativ über das Gesetz der seltenen Ereignisse,

(c) approximativ mit dem zentralen Grenzwertsatz

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 200 Kunden der Versicherung höchstens 3 einen Schaden melden.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)
Es soll der durchschnittliche Wasserverbrauch pro Person und Tag in Ulm bestimmt werden. Zu diesem Zweck sollen n Personen befragt werden. Ihr jeweiliger zufälliger täglicher Wasserverbrauch wird durch die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ modelliert. Es sei bekannt, dass $\mathbb{E} X_j = \mu$ und $\operatorname{Var} X_j = 87$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Ermittle, von wie vielen Personen der Wasserverbrauch mindestens untersucht werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ um maximal 8 vom Erwartungswert μ abweicht, mindestens 0.99 beträgt. Verwende hierfür

(a) die Tschebyscheff-Ungleichung,

(b) den zentralen Grenzwertsatz.

Hinweis: Es gilt $\Phi(2,58) = 0,995$, d.h. $2,58 = \Phi^{-1}(0,995)$.

Aufgabe 6 (1+3+1+2 Bonuspunkte)

In einem Bauunternehmen seien 10 gleiche Maschinen im Einsatz, deren Lebensdauern $X_1, \dots, X_{10}$ unabhängig und allesamt exponentialverteilt mit demselbem Parameter $\lambda > 0$ sind.

(a) Zeige, dass $P(\min\{X_1, \dots, X_{10}\} > x) = P(X_1 > x) \cdot \ldots \cdot P(X_{10} > x)$.

(b) Nutze Teil (a) um zu zeigen, dass die Zufallsvariable $\min\{X_1, \dots, X_{10}\}$ wieder exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda_{\text{min}} = 10\lambda$.
Hinweise:

- Zeige, dass die Verteilungsfunktion von $\min\{X_1, \dots, X_{10}\}$ mit der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung übereinstimmt.
- Da $X_1, \dots, X_{10}$ die gleiche Verteilung haben, gilt $P(X_1 \leq x) = P(X_i \leq x)$ für alle $i = 2, \dots, 10$.

(c) Wie groß ist die erwartete Zeitdauer bis es zum ersten Maschinenausfall kommt?

(d) Wie groß darf λ maximal sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,9$ alle Maschinen mindestens 30 Tage halten?

Aufgabe 7 (4 Bonusunkte)

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt im Intervall $[a, b]$ (Schreibweise: $X \sim \mathrm{U}[a, b]$).
Berechne die Parameter a und b, wenn $P(X \leq 3) = \frac{1}{3}$ und $P(X > 5) = \frac{1}{3}$ ist.

Wir wünschen allen Studenten frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch!