Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
Januar 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Aufgaben zur Klausurvorbereitung: Teil 2

Ergebnisse zur eigenen Kontrolle

Bitte beachten Sie, dass das keine Musterlösungen sind.

Aufgabe 1: $c = 4$, $\mathbb{P}[2 < X < 3] = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4}$, $\mathbb{E}X = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var} X = \frac{2}{9}$.

Aufgabe 2: $c = 6$, $\mathbb{P}[X < \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$ (wegen Symmetrie), $\mathbb{E}X = \frac{1}{2}$ (wegen Symmetrie), $\operatorname{Var} X = \frac{1}{20}$.

Aufgabe 3: Verteilungsfunktion von $X + Y$:

$$F_{X+Y}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \frac{t^2}{2ab}, & 0 \le t \le a; \\ \frac{a}{2b} + \frac{t-a}{b}, & a \le t \le b; \\ 1 - \frac{(a+b-t)^2}{2ab}, & b \le t \le a+b; \\ 1, & a+b \le t. \end{cases}$$

Aufgabe 4: $\mathbb{P}[XY < \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2$, $\mathbb{P}[Y < X^2] = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 5:

(a) $f(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$ (Cauchy-Verteilung).

(b) $f(y) = e^{-y}\mathbb{1}_{y>0}$ (Exponentialverteilung mit Parameter 1).

Aufgabe 6:

(a) Laplace-Transformierte: $m_X(t) = e^{t^2/2}$. Fourier-Transformierte: $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

(b) Laplace-Transformierte: $m_X(t) = \frac{1}{2t}(e^t - e^{-t}) = \frac{\sinh t}{t}$. Fourier-Transformierte: $\varphi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$.

(c) Laplace-Transformierte: $m_X(t) = \frac{1}{1-t}$ für $t < 1$, $m_X(t) = +\infty$ für $t \ge 1$. Fourier-Transformierte: $m_X(t) = \frac{1}{1-it}$ für $t \in \mathbb{R}$.

(d) Laplace-Transformierte: $m_X(t) = \frac{1}{1-t^2}$ für $|t| < 1$, $m_X(t) = +\infty$ für $|t| \ge 1$. Fourier-Transformierte: $m_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7:

(a) $\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{1}{2n+1}$, $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$.

(b) $\mathbb{E}[X^{2n}] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$.

Aufgabe 8: $\mathbb{E}S = 0$, $\mathbb{E}[S^2] = n\sigma^2$, $\mathbb{E}[S^4] = nv + 3n(n-1)\sigma^4$.

Aufgabe 9: $\mathbb{P}[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, wobei $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Aufgabe 10: $ac + bd$.

Aufgabe 11:

(a) Ja. $\mathbb{E}[(X-Y)(X+Y)] = \mathbb{E}[X^2 - Y^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2]$, da X und Y die gleiche Verteilung haben. Analog: $\mathbb{E}[X-Y] = 0$. Somit gilt

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-Y)(X+Y)] - \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y] = 0.$$

(b) Nein. Die Zufallsvariablen $X+Y$ und $X-Y$ sind abhängig. Begründung:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X+Y=0] &= \mathbb{P}[X=0, Y=0] = \mathbb{P}[X=0]\cdot\mathbb{P}[Y=0] = (1-p)^2,\\ \mathbb{P}[X-Y=1] &= \mathbb{P}[X=1, Y=0] = p(1-p).\end{aligned}$$

Allerdings ist das Ereignis $\{X+Y=0, X-Y=1\}$ unmöglich, somit

$$0 = \mathbb{P}[X+Y=0, X-Y=1] \neq \mathbb{P}[X+Y=0]\cdot\mathbb{P}[X-Y=1],$$

da die rechte Seite gleich $p\cdot(1-p)^3 > 0$ ist.

Aufgabe 12:

(a) e^{-1}

(b) $e^{-1/2}$.

Aufgabe 13: Dichte von $X+Y$: $f_{X+Y}(t) = te^{-t}\mathbb{1}_{t>0}$. Dichte von $X-Y$: $f_{X-Y}(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$, $t\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 14: Hinweis: Die charakteristische Funktion von X_1+X_2 ist das Produkt der charakteristischen Funktionen von X_1 und X_2:

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = e^{i\mu_1 t - \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2}e^{i\mu_2 t - \frac{1}{2}t^2\sigma_2^2} = e^{i(\mu_1+\mu_2)t - \frac{1}{2}t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}.$$

Somit stimmt $\varphi_{X_1+X_2}(t)$ mit der charakteristischen Funktion der $N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$-Verteilung überein. Da die Verteilung durch die charakteristische Funktion eindeutig bestimmt ist, muss $X_1+X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ gelten.

Aufgabe 15: Hinweis: Am einfachsten Produkt der erzeugenden Funktionen berechnen.

Aufgabe 16:

(a) 5.

(b) 2.

Aufgabe 17: Hinweis: Sei $0<a<1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left[\frac{X}{X+Y}\le a\right] = \mathbb{P}\left[X \le \frac{a}{1-a}Y\right] = \mathbb{P}[(X,Y)\in B] = \int_B e^{-(t+s)}d(t,s),$$

wobei $B = \{(t,s) : t \le \frac{a}{1-a}s, t>0, s>0\}$. Wir haben benutzt, dass die gemeinsame Dichte von (X,Y) gleich $f_{X,Y}(t,s) = e^{-t}e^{-s}$, $t>0$, $s>0$, ist. Berechnen Sie das Integral $\int\int_B e^{-(t+s)}dtds$.

Aufgabe 18: Z ist gleichverteilt auf $[0,1]$.

Aufgabe 19: $F_X(t) = 2t - t^2$ (für $t\in[0,1]$), $f_X(t) = 2-2t$, $F_Y(t) = t^2$ (für $t\in[0,1]$), $f_Y(t) = 2t$. Zu Kovarianz: $\mathbb{E}X = 1/3$, $\mathbb{E}Y = 2/3$, $\mathbb{E}[XY] = 1/4$ und somit $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{36}$. X und Y sind korreliert und somit auch abhängig.

Aufgabe 20: $c=3$, $f_X(s) = 3s^2\mathbb{1}_{s\in(0,1)}$, $F_X(s) = s^3$ (für $s\in[0,1]$), $f_Y(t) = 3(1-\sqrt{t})\mathbb{1}_{t\in(0,1)}$, $F_Y(t) = 3t - 2t^{3/2}$ (für $t\in[0,1]$). X und Y sind abhängig.

Aufgabe 21: Zu L^2-Konvergenz: $\mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = \mathbb{E}[X_n^2] = \operatorname{Var} X_n + (\mathbb{E}X_n)^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$ für $n \to \infty$. Zur stochastischen Konvergenz: stochastische Konvergenz folgt aus der L^2-Konvergenz.

Aufgabe 22: $X^2 + Y^2$ ist exponentialverteilt mit Parameter $1/2$.

Aufgabe 23: Der Grenzwert ist $\frac{2}{3}$. Begründung: Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt fast sicher:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}[X_1^2] = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 24: Zu (b): Konvergenz in Wahrscheinlichkeit: Für $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbb{P}[\mathbb{1}_{A_n} > \varepsilon] \le \mathbb{P}[A_n] = \frac{1}{n}$, was gegen 0 konvergiert. Fast sichere Konvergenz: folgt aus (a).

Aufgabe 25:

(a) Betrachte die Ereignisse $\{|Z| > 1\} \supset \{|Z| > 2\} \supset \{|Z| > 3\} \supset \ldots$. Die Ereignisse bilden eine fallende Folge und der Schnitt aller Ereignisse ist leer. Somit gilt wegen der Stetigkeit der Wahrscheinlichkeit, dass

$$\lim_{A\to\infty} \mathbb{P}[|Z| > A] = 0.$$

Also kann man ein A mit der Eigenschaft $\mathbb{P}[|Z| > A] < 1/1000$ finden.

(b) Zu jedem n kann mann ein b_n mit $\mathbb{P}[|X_n| > b_n] < \frac{1}{n^2}$ finden. (Beweis: wie in Teil a). Sei $A_n = \{|X_n| > b_n\}$. Betrachte das Ereignis

$$A = \{\text{“es treten unendlich viele Ereignisse } A_n \text{ ein”}\} = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Nach dem Lemma von Borel–Cantelli gilt: $\mathbb{P}[A] = 0$. Für jeden Ausgang $\omega \in A^c$ gilt: die Ungleichung $|X_n(\omega)| > b_n$ ist nur für endlich viele n erfüllt. Daraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{nb_n} = 0 \text{ für alle } \omega \in A^c.$$

Da aber $\mathbb{P}[A^c] = 1$, folgt daraus, dass $\frac{X_n(\omega)}{nb_n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$.

Aufgabe 26: Sei S die Summe, $S = X_1 + \ldots + X_{100}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}S = 100 \cdot \mathbb{E}X_1 = 100 \cdot \frac{1}{6}(1 + \ldots + 6) = 350;$$
$$\operatorname{Var} S = 100 \cdot \operatorname{Var} X_1 = 100 \cdot \left(\frac{1}{6}(1^2 + \ldots + 6^2) - 3.5^2\right) = \frac{875}{3}.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz erhalten wir

$$\mathbb{P}[S > 400] = \mathbb{P}[S > 400.5] = \mathbb{P}\left[\frac{S - 350}{\sqrt{875/3}} > \frac{400.5 - 350}{\sqrt{875/3}}\right]$$
$$\approx \mathbb{P}[N > 2.95698] = 1 - \Phi(2.9568) = 0.00155425.$$

Aufgabe 27:

(a) Es handelt sich um eine Summe von 100 unabhängigen Zufallsvariablen mit Geo(1/2)-Verteilung. Somit gilt $\mathbb{E}S = 200$, $\operatorname{Var} S = 200$. Zu Varianz: Varianz einer geometrischen Verteilung mit Parameter p ist $\frac{1-p}{p^2}$.

(b) Sei T die Anzahl von "Kopf" in 250 Würfen. Dann sind die Ereignisse $\{S > 250\}$ und $\{T < 100\}$ gleich.

$$\mathbb{P}[T < 100] = \mathbb{P}[T < 99.5] = \mathbb{P}\left[\frac{T-125}{\sqrt{250/4}} < \frac{99.5-125}{\sqrt{250/4}}\right] \approx \mathbb{P}[N < -3.22552] = 0.000628713.$$

Zum Vergleich: Die richtige Wahrscheinlichkeit ist 0.000606538.

Es gibt eine andere Lösung. Sei X_i die Zeit zwischen dem $i-1$-ten und dem i-ten Auftreten von "Kopf". Dann sind $X_i \sim \text{Geo}(1/2)$ und unabhängig. Die Wartezeit auf den 100-ten Kopf ist $S := X_1 + \ldots + X_{100}$.

$$\mathbb{P}[S > 250] = \mathbb{P}[S > 250.5] = \mathbb{P}\left[\frac{S-200}{\sqrt{200}} > \frac{250.5-200}{\sqrt{200}}\right] \approx \mathbb{P}[N > 3.57089] = 0.000177885.$$