KAPITEL 1

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Zufallsexperimente, Ausgänge, Grundmenge

In der Stochastik betrachten wir Zufallsexperimente. Die Ausgänge eines Zufallsexperiments fassen wir zu einer Menge zusammen. Diese Menge bezeichnen wir mit Ω und nennen die Grundmenge des Experiments.

Beispiel 1.1. Das einfachste Beispiel eines Zufallsexperiments ist das Werfen einer Münze. Die Münze hat zwei Seiten, die wir "Kopf" und "Zahl" nennen und mit K bzw. Z abkürzen. Es gibt also zwei Ausgänge: K und Z. Die Grundmenge besteht aus zwei Elementen:

$$\Omega = \{K, Z\}.$$

Beispiel 1.2. Ein anderes Zufallsexperiment ist das Werfen eines Würfels. Der Würfel hat 6 Seiten, die mit den Zahlen $1, \ldots, 6$ beschriftet sind. Das Experiment hat also 6 Ausgänge und die Grundmenge ist

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}.$$

Beispiel 1.3. Nun erweitern wir das Experiment. Werden zwei Münzen geworfen, so erhalten wir eine aus 4 Elementen bestehende Grundmenge

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}.$$

Werden nun drei Münzen geworfen, so besteht die Grundmenge aus 8 Elementen:

$$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, K), (Z, K, K), (K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K), (Z, Z, Z)\}.$$

Wenn wir nun allgemeiner n Münzen werfen, so ergibt sich für die Grundmenge

$$\Omega = \{K, Z\}^n \stackrel{def}{=} \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \{K, Z\}\}.$$

Diese Grundmenge besteht aus 2^n Ausgängen, also $\#\Omega = 2^n$.

Wir können das obige Beispiel verallgemeinern.

Beispiel 1.4. Wir betrachten ein beliebiges Experiment mit Grundmenge E. Dieses Experiment soll n-mal durchgeführt werden. Die Grundmenge Ω ergibt sich dann zu

$$\Omega = E^n \stackrel{def}{=} \{(e_1, \ldots, e_n) : e_i \in E\}.$$

Hier ist die Anzahl Ausgänge $\#\Omega = (\#E)^n$.

Noch allgemeiner können wir auch verschiedene Experimente durchführen.

Beispiel 1.5 (Produktexperiment). Wir führen n Experimente mit Grundmengen $E_1, \ldots, E_n$ *unabhängig* voneinander aus. Die Grundmenge ist dann ein sogenanntes kartesisches Produkt

$$\Omega = E_1 \times \ldots \times E_n \stackrel{def}{=} \{(e_1, \ldots, e_n) : e_1 \in E_1, \ldots, e_n \in E_n\}.$$

Die Anzahl der Ausgänge ist $\#\Omega = (\#E_1) \cdot \ldots \cdot (\#E_n)$.

Beispiel 1.6. Werfen wir eine Münze und einen Würfel, so haben wir $E_1 = \{K, Z\}$, $E_2 = \{1, \ldots, 6\}$ und das kartesische Produkt $\Omega = E_1 \times E_2$ besteht aus $2 \cdot 6 = 12$ Elementen:

(K,1)	(K,2)	(K,3)	(K,4)	(K,5)	(K,6)
(Z,1)	(Z,2)	(Z,3)	(Z,4)	(Z,5)	(Z,6)

Beispiel 1.7. Ein weiteres, einfacheres Beispiel für ein Zufallsexperiment ist das Geschlecht eines Kindes bei der Geburt, also

$$\Omega = \{\text{Junge}, \text{Mädchen}\}.$$

Beispiel 1.8. Wir stellen uns eine Versicherung vor, bei welcher n Personen versichert sind. Jede dieser Personen wird einen Schaden melden, oder eben nicht. Daher ist dies vergleichbar mit einem n-maligen Münzwurf.

In den obigen Beispielen ist die Grundmenge endlich. Man kann sich auch Experimente mit einer unendlichen Grundmenge vorstellen.

Beispiel 1.9. Ein Spieler hat einen Würfel und würfelt so lange, bis er die erste 6 würfelt. Prinzipiell könnte dies unendlich lange dauern. Als Ausgang des Experiments betrachten wir die Anzahl der Würfe. Daher ist hier die Grundmenge

$$\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

2. Ereignisse

Definition 1.1. Ein *Ereignis* ist eine Teilmenge der Grundmenge Ω.

Beispiel 1.2. Wir betrachten wieder das einfache Würfeln. Die Grundmenge ist $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$. Dann gibt es beispielhaft folgende Ereignisse:

$$A = \text{“eine gerade Zahl wird gewürfelt”} = \{2, 4, 6\},$$
$$B = \text{“eine ungerade Zahl wird gewürfelt”} = \{1, 3, 5\}.$$

Beispiel 1.3. Nun würfeln wir zweimal. Die Grundmenge ist $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ mit $\#\Omega = 36$. Nun wollen wir als die Summe der Augenzahlen beispielsweise 10 haben. Dieses Ereignis kann sich durch 3 Wurfkombinationen ergeben, nämlich

$$A = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}.$$

Hier ist zu beachten, dass es sich bei $(6, 4)$ und $(4, 6)$ um verschiedene Ausgänge handelt.

Beispiel 1.4. Als Spezialfälle existieren:

(1) unmögliches Ereignis, welches nie eintritt, $A = \emptyset$.
(2) sicheres Ereignis, welches immer eintritt, $A = \Omega$.

Definition 1.5. Ein *Elementarereignis* ist ein aus nur einem Element bestehendes Ereignis, also $A = \{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$. Jedes Ereignis setzt sich somit aus Elementarereignissen zusammen.

Bemerkung 1.6. Die Anzahl der möglichen Ereignisse errechnet sich durch $2^{\#\Omega}$.

Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse. Mit mengentheoretischen Operationen lassen sich weitere Ereignisse konstruieren, nämlich

- $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ oder $\omega \in B\}$: "A tritt ein *oder* B tritt ein".
- $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ und $\omega \in B\}$: "A tritt ein *und* B tritt ein".
- $A^c = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$: "$A$ tritt *nicht* ein" (Komplement von A).
- $B^c = \{\omega \in \Omega | \omega \notin B\}$: "$B$ tritt *nicht* ein" (Komplement von B).
- $A \backslash B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \notin B\}$: "$A$ tritt ein, aber B tritt nicht ein".
- $B \backslash A = \{\omega \in \Omega : \omega \in B, \omega \notin A\}$: "$B$ tritt ein, aber A tritt nicht ein".
- $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$: "$A$ tritt ein *oder* B tritt ein, *aber nicht beide*" (symmetrische Differenz).

Bemerkung 1.7. Die Mengendifferenz $\backslash$ ist nicht kommutativ: $A \backslash B \neq B \backslash A$. Es gilt $A \backslash B = A \cap B^c$ und $A^c = \Omega \backslash A$.

Definition 1.8. Zwei Ereignisse A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$.

Beispiel 1.9. Folgende Paare von Ereignissen sind disjunkt:
- $A \backslash B$ und $B \backslash A$.
- A und A^c.
- A und $\emptyset$.

Definition 1.10. Wir schreiben $A \subset B$, falls alle Elemente von A auch in B enthalten sind.

Beispiel 1.11. Wir betrachten ein Experiment, bei dem zwei Münzen geworfen werden. Man kann auch eine Münze zweimal werfen. Wir betrachten folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= \text{"erste Münze zeigt Kopf"} = \{KK, KZ\}, \\ B &= \text{"zweite Münze zeigt Kopf"} = \{KK, ZK\}. \end{aligned}$$

Nun können wir diese beiden Ereignisse verknüpfen:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \text{"}\textit{beide}\text{ Münzen zeigen Kopf"} = \{KK\}, \\ A \cup B &= \text{"}\textit{mindestens}\text{ eine Münze zeigt Kopf"} = \{KK, KZ, ZK\}, \\ A \triangle B &= \text{"}\textit{genau}\text{ eine Münze zeigt Kopf"} = \{KZ, ZK\}. \end{aligned}$$

Beachte, dass $KK \notin A \triangle B$. Man kann weitere Ereignisse definieren:

$$\begin{aligned} \text{"beide Münzen zeigen Zahl"} &= A^c \cap B^c, \\ \text{"keine Münze zeigt Kopf"} &= (A \cup B)^c. \end{aligned}$$

Diese Ereignisse sind gleich. Analog sind die folgenden Ereignisse gleich:

$$\begin{aligned} \text{"nicht beide Münzen zeigen Kopf"} &= (A \cap B)^c, \\ \text{"mindestens eine Münze zeigt Zahl"} &= A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

Satz 1.12 (De Morgan Regeln). *Für beliebige Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gilt*
1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Beweis. Zu (1): $\omega \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow \omega \notin A \cup B \Leftrightarrow \omega \notin A, \omega \notin B \Leftrightarrow \omega \in A^c \cap B^c$.
Beweis von (2) ist analog. □

Bemerkung 1.13. Man kann die Regeln auf beliebige Anzahl von Ereignissen verallgemeinern: Für beliebige Ereignisse $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ gilt

(1) $(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$.
(2) $(A_1 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \ldots \cup A_n^c$.

SATZ 1.14. *Für beliebige Ereignisse $A, B, C \subset \Omega$ gelten folgende Gesetze:*

(1) *Gesetz der doppelten Negation: $(A^c)^c = A$.*
(2) *Erstes Distributivgesetz: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*
(3) *Zweites Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.*

BEWEIS. Zu (2): $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in A$ und ($x \in B$ oder $x \in C$) $\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. $\square$

3. Wahrscheinlichkeiten

BEISPIEL 1.1. Buffon und Pearson haben mit der Münze experimentiert:

- Buffon: 4040 Münzwürfe, davon 2048 Kopf.
- Pearson: 24000 Münzwürfe, davon 12012 Kopf.

Also zeigte die Münze in beiden Fällen ungefähr in 50% aller Fälle Kopf. Deshalb sagt man, dass die Wahrscheinlichkeit von "Kopf" gleich 1/2 ist, jedenfalls dann, wenn die Münze fair (symmetrisch) ist.

BEHAUPTUNG 3.1 (Empirisches Gesetz der großen Zahlen). *Betrachte ein Experiment mit der Grundmenge Ω und sei $A \subset \Omega$ ein Ereignis. Wir wiederholen das Experiment n-mal unabhängig voneinander. Sei $N_n(A)$ eine Variable, die zählt, wie oft das Ereignis A eingetreten ist. Dann existiert der Grenzwert*

$$\mathbb{P}[A] := \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n} \in [0, 1].$$

BEMERKUNG 1.2. Die Zahl $N_n(A)/n$ ist die *relative Häufigkeit* des Eintretens von A in n Experimenten. Die Zahl $\mathbb{P}[A]$ heißt die *Wahrscheinlichkeit* von A.

DEFINITION 1.3. Sei Ω eine endliche oder abzählbare Menge. Eine Funktion $p : \Omega \to [0, 1]$ heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion*, falls

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Interpretation: $p(\omega)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs $\omega \in \Omega$.

BEMERKUNG 1.4. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subset \Omega$ ist definiert durch

$$\mathbb{P}[A] \stackrel{def}{=} \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

DEFINITION 1.5. Bei einem *Laplace-Experiment* nehmen wir an, dass alle Ausgänge die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Sei $\#\Omega = n$ endlich, dann gilt

$$p(\omega) = \frac{1}{n} \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Somit gilt für jedes Ereignis $A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Beispiel 1.6. Wir würfeln mit einem fairen (=symmetrischen) Würfel zweimal. Die Grundmenge ergibt sich dann zu $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ mit $\#\Omega = 6^2 = 36$.

- Für das Ereignis $A =$ "Augensumme $= 10$" $= \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$ ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von
$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$
- Für das Ereignis $B =$ "Augensumme $= 11$" $= \{((6,5), (5,6)\}$ ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von
$$\mathbb{P}[B] = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$
- Für das Ereignis $C =$ "Augensumme $= 12$" $= \{(6,6)\}$ ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von
$$\mathbb{P}[C] = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{1}{36}.$$

Bemerkung 1.7. Nicht jedes Experiment ist ein Laplace-Experiment. Beispiele:

(1) Das Werfen einer Reißzwecke ist kein Laplace-Experiment, da
$$p(\text{"Landung auf dem Kopf"}) \neq p(\text{"seitliche Landung"}).$$
(2) Die Bestimmung der Blutgruppe ist kein Laplace-Experiment, da nicht alle Blutgruppen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.
(3) Unfaire (=unsymmetrische) Würfel oder Münzen.

Beispiel 1.8 (Falsches Modell). Wir werfen zwei Münzen gleichzeitig. Es gibt drei mögliche Ausgänge:
$$\omega_1 = \text{"beide Kopf"}, \;\; \omega_2 = \text{"beide Zahl"}, \;\; \omega_3 = \text{"verschiedene Symbole"}.$$
Hieraus ergibt sich die Grundmenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Allerdings ist aus Erfahrung bekannt, dass die Laplace-Annahme $p(\omega_1) = p(\omega_2) = p(\omega_3) = \frac{1}{3}$ falsch ist. Das oben beschriebene Modell ist falsch.

Im richtigen Modell sind die Münzen unterscheidbar (man stelle sich vor, dass sie mit verschiedenen Farben, etwa rot und gelb, markiert sind). Das richtige Modell hat 4 mögliche Ausgänge:
$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \text{"beide Münzen zeigen Kopf"},\\
\omega_2 &= \text{"beide Münzen zeigen Zahl"},\\
\omega_3 &= \text{"rote Münze zeigt Kopf, gelbe Münze zeigt Zahl"},\\
\omega_4 &= \text{"rote Münze zeigt Zahl, gelbe Münze zeigt Kopf"}.
\end{aligned}$$
Beachte, dass ω_3 und ω_4 zwei verschiedene Ausgänge sind. Die Grundmenge ist
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{KK, ZZ, KZ, ZK\}$$
und $p(\omega) = \frac{1}{4}$ für alle $\omega \in \Omega$. Somit gilt
$$\mathbb{P}[\text{"verschiedene Symbole"}] = \frac{\#\{ZK, KZ\}}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}.$$

Definition 1.9. Sei Ω eine Grundmenge. Die Menge aller Ereignisse in Ω heißt die *Potenzmenge* von Ω und wird mit 2^Ω bezeichnet. Die Elemente der Potenzmenge sind also alle möglichen Ereignisse $A \subset \Omega$. Es gilt $\#2^\Omega = 2^{\#\Omega}$.

Definition 1.10. Sei Ω eine endliche oder abzählbare Menge. Eine Funktion $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0,1]$ heißt ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf Ω, falls folgende zwei Bedingungen gelten:

(1) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.
(2) Für beliebige paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}\left[\cup_{k=1}^\infty A_k\right] = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[A_k]. \tag{1.1}$$

Dabei heißen Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ *paarweise disjunkt* (oder einfach *disjunkt*), falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Eigenschaft (1.1) heißt *σ-Additivität*.

Bemerkung 1.11. Die Funktion $\mathbb{P}$ ordnet jedem Ereignis $A \subset \Omega$ eine Zahl $\mathbb{P}[A]$ zu. Die Zahl $\mathbb{P}[A]$ heißt die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A. Die Wahrscheinlichkeit kann nur Werte im Intervall $[0,1]$ annehmen.

Definition 1.12. Ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ mit den oben aufgelisteten Eigenschaften heißt *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum*.

Bemerkung 1.13. Das Wort "diskret" bezieht sich dabei auf die Forderung, dass Ω endlich oder abzählbar sein soll. Später werden wir auch allgemeinere (überabzählbare) Wahrscheinlichkeitsräume betrachten.

Bemerkung 1.14. Ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \to [0,1]$ gegeben, so definiert $\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Umgekehrt, ist $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, so ist $p(\omega) := \mathbb{P}[\{\omega\}]$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Beide Begriffe sind somit äquivalent.

Wir leiten nun einige Eigenschaften von $\mathbb{P}$ her.

Lemma 1.15. *Unmögliches Ereignis hat Wahrscheinlichkeit* 0. *Das heißt,* $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$.

Beweis. Setze $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$ in (1.1). Es ergibt sich $\mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}[\emptyset] + \mathbb{P}[\emptyset] + \ldots$. Das kann nur für $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$ gelten. □

Lemma 1.16 (Additivität). *Für beliebige paarweise disjunkte Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ *gilt*

$$\mathbb{P}[\cup_{k=1}^n A_k] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[A_k].$$

Beweis. Setze $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ in (1.1) und benutze $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$. □

Lemma 1.17. *Für jedes Ereignis* $A \subset \Omega$ *gilt:*

$$\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A].$$

Beweis. Ereignisse A und A^c sind disjunkt und es gilt $A \cup A^c = \Omega$. Mit der Additivität ergibt sich $1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[A \cup A^c] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A^c]$. □

Lemma 1.18. *Für beliebige Ereignisse* $A, B \subset \Omega$ *gilt*

$$\mathbb{P}[A \backslash B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B].$$

Beweis. Ereignisse $A \cap B$ und $A \backslash B$ sind disjunkt und es gilt $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$. Mit der Additivität folgt $\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \backslash B] = \mathbb{P}[A]$. $\square$

Lemma 1.19. *Für beliebige Ereignisse $A, B \subset \Omega$ (nicht unbedingt disjunkt) gilt:*

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B].$$

Beweis. Ereignisse $A \backslash B$ und B sind disjunkt und $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$. Mit der Additivität folgt $\mathbb{P}[A \backslash B] + \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cup B]$. Mit Lemma 1.18 folgt $P[A] - \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cup B]$.

Lemma 1.20 (Siebformel). *Für beliebige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ (nicht unbedingt disjunkt) gilt*

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = \sum_i \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i<j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_k] - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n].$$

Lemma 1.21 (Monotonie). *Für beliebige Ereignisse $A \subset B$ gilt $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$.*

Beweis. Ereignisse A und $B \backslash A$ sind disjunkt und es gilt $A \cup (B \backslash A) = B$. Mit der Additivität folgt $\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \backslash A] = \mathbb{P}[B]$. Das Lemma folgt, denn $\mathbb{P}[B \backslash A] \geq 0$. $\square$

Lemma 1.22 (Subadditivität). *Für beliebige Ereignisse $A, B \subset \Omega$ (nicht unbedingt disjunkt) gilt*

$$\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B].$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 1.19, denn $\mathbb{P}[A \cap B] \geq 0$. $\square$

Lemma 1.23 (Subadditivität). *Für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ gilt:*

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] \leq \mathbb{P}[A_1] + \ldots + \mathbb{P}[A_n].$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 1.22 mit Induktion. $\square$

Beispiel 1.24 (Gegenereignis betrachten). Wir werfen 10 faire Münzen. Berechnen möchten wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welches wie folgt definiert ist:

$$A = \text{“mindestens eine Münze zeigt Kopf”}.$$

Lösung. Die Grundmenge ist hier $\Omega = \{K, Z\}^{10}$ mit $\#\Omega = 2^{10}$. Das Komplement des Ereignisses A ist

$$A^c = \text{“keine Münze zeigt Kopf”} = \{Z \ldots Z\}.$$

Somit besteht A^c aus nur einem Ausgang: $\#A^c = 1$. Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Komplement von A zu $\mathbb{P}[A^c] = \frac{1}{2^{10}}$. Also errechnet sich die Wahrscheinlichkeit von A durch

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c] = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$