KAPITEL 2

Kombinatorik

In der Kombinatorik geht es um das Abzählen von Kombinationen.

2.1. Geburtstagsproblem

Beispiel 2.1.1 (Geburtstagsproblem). In einem Raum befinden sich $k = 200$ Studenten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es im Raum 2 Studenten gibt, die am gleichen Tag Geburtstag feiern?

Lösung. Es gibt $n = 365$ Tage im Jahr. Stellen wir uns vor, dass jeder Student seinen Geburtstag zufällig aus der Menge $\{1, \dots, n\}$ auswählt. Die Grundmenge dieses Experiments ist

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^k = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, 365\} \text{ für alle } i = 1, \dots, k\}.$$

Die Anzahl der Elemente in Ω ist $\#\Omega = n^k$. Nun definieren wir das Ereignis

$$A = \text{“mindestens zwei Studenten haben am selben Tag Geburtstag”}.$$

Das Gegenereignis lautet dann

$$A^c = \text{“keine zwei Studenten haben am selben Tag Geburtstag”}.$$

Äquivalent kann man A^c auch so beschreiben:

$$A^c = \text{“alle Studenten haben Geburtstage an verschiedenen Tagen”}.$$

Um die Anzahl der Ausgänge im Ereignis A^c zu berechnen, gehen wir wie folgt vor. Wir möchten die Anzahl der Möglichkeiten bestimmen, für alle Studenten Geburtstage auszuwählen, so dass keine zwei Geburtstage gleich sind. Der erste Student hat für seinen Geburtstag n Möglichkeiten, der zweite hat $n-1$ Möglichkeiten, usw. Der letzte, k-te Student, hat $(n-k+1)$ Möglichkeiten. Diese Möglichkeiten können beliebig miteinander kombiniert werden, also

$$\#A^c = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \stackrel{def}{=} (n)_k.$$

Somit gilt für das Gegenereignis

$$\mathbb{P}[A^c] = \frac{\#A^c}{\#\Omega} = \frac{(n)_k}{n^k}.$$

Für das Ereignis A erhalten wir

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c] = 1 - \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}.$$

Bemerkung 2.1.2. Für $n = 23$ Studenten gilt überraschenderweise $\mathbb{P}[A] \approx 0.507297 \approx 0.5$. Für $n = 200$ Studenten gilt

$$\mathbb{P}[A] \approx 0.99999999999999999999999999999983898744815.$$

2.2. Urnenmodelle

Es sei eine Urne mit n Bällen gegeben. Die Bälle seien mit $1, \dots, n$ beschriftet. Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment: es wird k Mal ein Ball aus der Urne gezogen und seine Nummer notiert. Es gibt nun 4 Möglichkeiten:

- die Bälle werden mit/ohne Zurücklegen gezogen;
- die Nummern werden mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge notiert.

Modell 1: Ziehen mit Reihenfolge und mit Zurücklegen. "Ziehen mit Zurücklegen" heißt, dass nach jeder Ziehung der gezogene Ball zurück in die Urne gelegt wird. Insbesondere kann ein Ball mehrmals aus der Urne gezogen werden. "Ziehen mit Reihenfolge" heißt, dass zwei Ausgänge des Experiments auch dann als unterschiedlich angesehen werden, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der gezogenen Bälle unterscheiden. Zum Beispiel gibt es für $n = 4$ Bälle und $k = 2$ Ziehungen folgende Ausgänge:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

Beachte: Elemente $(1,1), \dots, (4,4)$ sind präsent (da Ziehen mit Zurücklegen). Elemente $(1,2)$ und $(2,1)$ gelten als verschiedene Elemente (da Ziehen mit Reihenfolge).
Beim Ziehen mit Reihenfolge und mit Zurücklegen handelt sich um ein Produktexperiment: das Ziehen eines Balls aus einer Urne mit n Bällen wird k Mal unter gleichen Bedingungen wiederholt. Die Grundmenge kann somit wie folgt dargestellt werden:

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Es gilt $\#\Omega = n^k$.

Beispiel 2.2.1. k-maliges Würfeln. Man stelle sich eine Urne mit 6 Bällen $1, \dots, 6$ vor. Anstatt einmal zu würfeln kann man auch einen Ball aus dieser Urne ziehen. Anstatt k-mal zu würfeln, kann man das Ziehen k-mal wiederholen. Da eine Augenzahl mehrmals gewürfelt werden kann, müssen die Bälle zurück in die Urne gelegt werden. Beim Würfeln müssen die Ausgänge "zuerst 1 gewürfelt, dann 2" und "zuerst 2 gewürfelt, dann 1" als unterschiedlich angesehen werden. Also wird die Reihenfolge berücksichtigt.

Beispiel 2.2.2. Geburtstage von k Studenten. Die möglichen Geburtstage können als $n = 365$ Bälle dargestellt werden.

Modell 2: Ziehen mit Reihenfolge und ohne Zurücklegen. "Ziehen ohne Zurücklegen" heißt, dass ein aus der Urne gezogener Ball nicht mehr in die Urne gelegt wird. Insbesondere kann jeder Ball höchstens einmal gezogen werden. Zum Beispiel ergeben sich für $n = 4$ Bälle und $k = 2$ Zieungen folgende Möglichkeiten:

	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)		(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)		(3,4)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	

Beachte: Elemente $(1,1), \dots, (4,4)$ sind nicht präsent, da wir ohne Zurücklegen ziehen. Elemente $(1,2)$ und $(2,1)$ gelten als unterschiedlich, da die Reihenfolge berücksichtigt wird.

Die Grundmenge kann wie folgt dargestellt werden:

$$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Elemente von Ω können als geordnete k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ angesehen werden. Die Anzahl der Ausgänge in Ω kann so bestimmt werden: für die erste Ziehung gibt es n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$, usw. Für die letzte Ziehung gibt es $n-k+1$ Möglichkeiten. Somit gilt

$$\#\Omega = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \stackrel{def}{=} (n)_k.$$

Bemerkung 2.2.3. Für $k > n$ hat das Experiment keinen Sinn: wir können nicht mehr Bälle ziehen, als es in der Urne gibt. Es gilt dann logischerweise $(n)_k = 0$ (das Experiment hat keine Ausgänge).

Bemerkung 2.2.4. Ein wichtiger Spezielfall ist der Fall $k = n$. In diesem Fall wird jeder Ball aus der Urne genau einmal gezogen, es geht nur darum, in welcher Reihenfolge das geschieht. Die Ausgänge sind somit Mögliche Permutationen von n Bällen. Zum Beispiel gibt es für $n = 3$ Bälle folgende 6 Möglichkeiten:

$$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).$$

Die Anzahl der Permutationen von n unterscheidbaren Objekten ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot n$. Das kann man wie folgt sehen: an die erste Stelle kann man n mögliche Objekte Stellen, für die zweite Stelle kann man aus $(n-1)$ möglichen Objekten auswählen, usw.

Modell 3: Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen. "Ziehen ohne Reihenfolge" heißt, dass 2 Ausgänge, die sich nur durch die Reihenfolge der gezogenen Bälle unterscheiden, als gleich gelten. "Ziehen ohne Zurücklegen" heißt, dass ein Ball höchstens einmal gezogen werden kann. Für $n = 4$ Bälle und $k = 2$ Ziehungen ergeben sich folgende Möglichkeiten:

	(1,2)	(1,3)	(1,4)
		(2,3)	(2,4)
			(3,4)

Beachte: Ausgänge $(1,1), \ldots, (4,4)$ sind nicht präsent (da Ziehen ohne Zurücklegen). Die Ausgänge $(1,2)$ und $(2,1)$ gelten als gleich (da die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird). Deshalb haben wir in der obigen Tabelle nur einen dieser beiden Ausgänge aufgeführt.
Die Grundmenge kann so dargestellt werden:

$$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_1 < \ldots < a_k, a_i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Alternativ kann man sich Ω als die Menge aller (ungeordneten) k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ vorstellen:

$$\Omega = \{\{a_1, \ldots, a_k\} : a_i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Zur Erinnerung: in einer Menge sind die Elemente nach Definition nicht geordnet, so dass z.B. $\{1,2\} = \{2,1\}$. Die Anzahl der Elemente von Ω kann wie folgt bestimmt werden. Zuerst können wir *mit* Reihenfolge und mit Zurücklegen ziehen. Es gibt $(n)_k$ Ausgänge. Nun müssen wir aber die Reihenfolge vergessen. Das heißt, wir müssen Ausgänge, die sich nur durch Permutationen unterscheiden, identifizieren (z.B. müssen $(1,2)$ und $(2,1)$ identifiziert werden). Da man $k!$ Permutationen von k Elementen hat, werden jeweils $k!$ Ausgänge zu einem Ausgang zusammengefasst. Es gilt also

$$\#\Omega = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \overset{def}{=} \binom{n}{k}.$$

Definition 2.2.5. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beispiel 2.2.6 (Lotto). Aus eine Urne mit 49 Kugeln mit den Nummern $1,2,\ldots,49$ werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Um zu gewinnen, muss man die Nummern der gezogenen Kugeln erraten. Man tippt auf eine Kombination, etwa auf $(1,2,\ldots,6)$. Wie wahrscheinlich ist das Ereignis

$$A = \text{“man hat die richtige Kombination getippt”}.$$

Die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, muss beim Lotto nicht erraten werden.

Lösung 1. Stellen wir uns vor, dass alle 6 Kugeln *gleichzeitig*, mit einem Griff, aus der Urne gezogen werden. Es wird also eine 6-elementige Teilmenge von $\{1,2,\ldots,49\}$ zufällig ausgewählt.

$$\Omega = \text{Menge aller 6-elementigen Teilmengen von } \{1,\ldots,49\}.$$

Es gilt somit $\#\Omega = \binom{49}{6}$. Nur eine Kombination (nämlich, $\{1,2,\ldots,6\}$) führt dazu, dass man gewinnt. Somit gilt $\#A = 1$ und

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 7,15\cdot 10^{-8}.$$

Lösung 2. Stellen wir uns vor, dass die Kugeln nacheinander gezogen werden und die Nummern der Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge notiert werden. Es gilt dann

$$\Omega = \text{Menge aller geordneten 6-elementigen Teilmengen von } \{1,\ldots,49\}.$$

Es gilt $\#\Omega = (49)_6 = 49\cdot 48\cdot\ldots\cdot 44$. Nun führt aber nicht nur die Kombination $(1,2,3,4,5,6)$ zum Gewinn, sondern zum Beispiel auch die Kombination $(2,1,3,4,5,6)$, genauso wie jede andere Permutation von $(1,\ldots,6)$. Es gibt $6!$ solche Permutationen, also $\#A = 6!$. Wir erhalten

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6!}{49\cdot 48\cdot\ldots\cdot 44} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 7,15\cdot 10^{-8}.$$

Satz 2.2.7 (Eigenschaften der Binomialkoeffizienten). *Es gelten folgende Formeln:*

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(3) $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Korollar 2.2.8. *Es gilt* $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ *und* $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Beispiel 2.2.9. In einem Raum gibt es n Plätze. Der Raum wird von k Studenten betreten, die die Plätze besetzen. Auf einem Platz kann maximal 1 Student sitzen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Lösung. Das Problem ist nicht eindeutig gestellt. Sind die Studenten *unterscheidbar*, so handelt es sich um das Ziehen ohne Zurücklegen und *mit* Reihenfolge. Jeder Student "zieht" sich einen Platz. Ohne Zurücklegen, denn kein Platz kann zweimal gezogen werden. Mit Reihenfolge, denn die Studenten sind unterscheidbar: "Student A setzt sich auf Platz 1 und Student B auf Platz 2" ist ein anderer Ausgang, als "Student A setzt sich auf Platz 2 und Student B auf Platz 1". Es gibt $(n)_k$ Kombinationen.
Sind die Studenten *ununterscheidbar*, so handelt es sich um das Ziehen ohne Zurücklegen und *ohne* Reihenfolge. Mit anderen Worten, es wird eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}$ ausgewählt. Das sind dann die Plätze, die besetzt werden. Welcher Platz von wem besetzt wird, spielt keine Rolle, denn die Studenten sind ununterscheidbar. In diesem Fall gibt es $\binom{n}{k}$ Kombinationen.

Modell 4: Ziehen ohne Reihenfolge und mit Zurücklegen. Da wir mit Zurücklegen ziehen, kann ein Ball mehrmals gezogen werden. Da wir ohne Reihenfolge ziehen, achten wir nur darauf, wie oft jeder Ball gezogen wurde, nicht aber in welcher Reihenfolge das geschah. Für $n = 4$ Bälle und $k = 2$ Ziehungen ergeben sich folgende Möglichkeiten:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)
		(3,3)	(3,4)
			(4,4)

Beachte: Elemente $(1,1),\ldots,(4,4)$ sind präsent, denn es wird mit Zurücklegen gezogen. Elemente $(1,2)$ und $(2,1)$ gelten als identisch, denn die Reihenfolge wird nicht berücksichtigt. Deshalb haben wir nur $(1,2)$ in der Tabelle aufgeführt. Die Grundmenge ist gegeben durch:

$$\Omega = \{(a_1,\ldots,a_k) : a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k, a_i \in \{1,\ldots,n\}\}.$$

Elemente von Ω können als ungeordnete k-elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ angesehen werden, wobei Wiederholungen der Elemente in der Teilmenge erlaubt sind. Im nächsten Beispiel zeigen wir, dass

$$\#\Omega = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Beispiel 2.2.10. k Vögel setzen sich auf n Bäume. Mehrfachbesetzungen sind möglich. Die Vögel sind ununterscheidbar. Wie viele Besetzungen gibt es?

Lösung. Wir werden Vögel als Kreuze darstellen. Vögel, die auf verschiedenen Bäumen sitzen, trennen wir durch eine Trennwand. Gibt es zum Beispiel $n = 4$ Bäume und sitzen auf diesen Bäumen $2,3,0,1$ Vögel, so stellen wir das wie folgt dar:

$$\times\times \mid \times\times\times \mid\mid \times\ .$$

Im Allgemeinen haben wir $n-1$ Trennwände (da n Bäume), und k Kreuze (=Vögel). Insgesamt haben wir $n+k-1$ Elemente. Aus diesen $n+k-1$ Elementen müssen diejenigen k

Elemente ausgewählt werden, die Kreuze sind. Die Anzahl der Konfigurationen ist somit

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Beispiel 2.2.11. Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Zahl k als Summe von n Summanden zu schreiben? Reihenfolge der Summanden wird berücksichtigt, Nullen sind erlaubt. Beispielsweise kann man $k = 4$ wie folgt als Summe von $n = 2$ Summanden darstellen:

$$4 = 4 + 0 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 0 + 4.$$

Lösung. Jede Darstellung von k als Summe von n Summanden entspricht genau einer Besetzung von k Bäumen durch n ununterscheidbare Vögel. Dabei entspricht der i-te Summand der Anzahl der Vögel auf dem i-ten Baum. Somit gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

2.3. Hypergeometrische Verteilung

Beispiel 2.3.1 (Hypergeometrische Verteilung). Betrachte einen Teich, in dem n Fische schwimmen. Von den Fischen seien n_1 rot und n_2 gelb, mit $n_1 + n_2 = n$. Ein Fischer fängt k verschiedene Fische (ohne Zurücklegen). Betrachte das Ereignis

$$A = \text{“es wurden genau } k_1 \text{ rote Fische gefangen (und somit } k_2 := k - k_1 \text{ gelbe)”}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A?

Lösung. Die Grundmenge Ω ist die Menge aller k-elementigen Teilengen von $\{1, \ldots, n\}$. Somit gilt

$$\#\Omega = \binom{n}{k}.$$

Nun bestimmen wir die Anzahl der Elemente in A. Damit A eintritt, muss der Fischer k_1 rote und k_2 gelbe Fische fangen. Er kann sich aus der Menge der roten Fische k_1 Fische aussuchen, dafür gibt es $\binom{n_1}{k_1}$ Möglichkeiten. Dann kann er sich aus der Menge der gelben Fische k_2 Fische aussuchen, dafür gibt es $\binom{n_2}{k_2}$ Möglichkeiten. Da man jede Auswahl der roten Fische mit jeder Auswahl der gelben Fische beliebig kombinieren kann, ergibt sich für die Anzahl der Elemente in A:

$$\#A = \binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit von A erhalten wir dann

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}.$$

Diese Formel nennt man die hypergeometrische Verteilung. Genauer: man sagt, dass die Anzahl der roten Fische, die der Fischer gefangen hat, eine hypergeometrische Verteilung hat.

Beispiel 2.3.2 (Lotto). Es werden 6 Kugeln aus einem Topf mit 49 nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Man darf auf 6 verschiedene Nummern tippen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit von

$$A = \text{“man hat genau 3 Nummern richtig getippt”}.$$

Auf die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, wird beim Lotto nicht getippt.

LÖSUNG. Kugeln = Fische. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit tippen wir auf die Kugeln $1, 2, \dots, 6$. Das sind die roten Fische. Alle anderen Kugeln, nämlich $7, \dots, 49$, sind die gelben Fische. Die Kugeln liegen in der Urne (= die Fische schwimmen im Teich). Es werden 6 Kugeln zufällig ohne Zurücklegen gezogen (= 6 Fische gefangen). Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen 6 Fischen genau 3 rot sind. Es ergibt sich

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0.01765.$$

Wir können das Beispiel mit den Fischen verallgemeinern.

BEISPIEL 2.3.3 (Eine allgemeinere Form der hypergeometrischen Verteilung). Wir betrachten einen Teich mit n Fischen. Jeder Fisch habe eine der $r \geq 2$ Farben. Es gebe im Teich n_1 Fische von Farbe 1, n_2 Fische von Farbe 2, …, n_r von Farbe r, wobei $n_1 + \ldots + n_r = n$. Ein Fischer fängt ohne Zurücklegen k Fische. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\begin{aligned} A = \text{“es wurden } & k_1 \text{ Fische von Farbe 1,} \\ & k_2 \text{ Fische von Farbe 2,} \\ & \ldots \\ & k_r \text{ Fische von Farbe } r \text{ gefangen”.} \end{aligned}$$

Dabei seien $k_1, \dots, k_r$ gegeben und es gelte $k_1 + \ldots + k_r = k$.

LÖSUNG. Es gilt

$$\#\Omega = \binom{n}{k}, \quad \#A = \binom{n_1}{k_1} \cdot \ldots \cdot \binom{n_r}{k_r}.$$

Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \ldots \cdot \binom{n_r}{k_r}}{\binom{n}{k}}.$$

BEISPIEL 2.3.4. Ein Kartenspiel aus 52 Karten wird auf 2 Spieler verteilt, jeder erhält 26 Karten. Bestimme die Wahrscheinlichkeit von

$$A = \text{“Erster Spieler erhält genau 3 Asse, genau 2 Könige und genau 1 Dame”.}$$

LÖSUNG. Die Grundmenge besteht aus allen 26-elementigen Teilmengen einer 52-elementigen Menge. Diese Teilmenge ist die Menge der Karten, die der erste Spieler bekommt, der zweite bekommt dann automatisch den Rest. Es gilt somit $\#\Omega = \binom{52}{26}$. Damit A eintritt, muss der erste Spieler 3 der 4 Asse, 2 der 4 Könige, 1 der 4 Damen, und 20 der 40 restlichen Karten bekommen. Somit erhalten wir

$$\#A = \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{40}{20}.$$

Die Wahrscheinlichkeit von A ist

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{40}{20}}{\binom{52}{26}}.$$

2.4. Binomialverteilung und Multinomialverteilung

Beispiel 2.4.1. In einem Teich schwimmen n Fische, davon seien n_1 rot und n_2 gelb, mit $n_1+n_2=n$. Es werden k Fische *mit Zurücklegen* gefangen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \text{“Es wurde genau } k_1\text{-mal ein roter Fisch aus dem Teich gezogen”}.$$

Bemerkung 2.4.2. Definiert man $k_2 = k - k_1$, so kann man das Ereignis A auch so beschreiben:

$$A = \text{“Es wurde genau } k_2\text{-mal ein gelber Fisch aus dem Teich gezogen”}.$$

Lösung. Es handelt sich um eine k-fache Wiederholung (unter gleichen Bedingungen) des Experiments “ein Fisch wird gezogen, Farbe notiert, Fisch freigelassen”. Somit gilt

$$\Omega = \{1,\ldots,n\}^k.$$

Die Anzahl der Ausgänge ist $\#\Omega = n^k$. Um die Anzahl der Elemente in A zu bestimmen, schauen wir uns zuerst ein anderes Ereignis an:

$$\begin{aligned} B = \text{“}&\text{Bei den ersten } k_1 \text{ Versuchen wurden rote Fische gefangen}\\ &\text{und bei den restlichen } k_2 \text{ Versuchen wurden gelbe Fische gefangen”}. \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen den Ereignissen A und B besteht darin, dass bei B die Nummern der Versuche, bei denen rote (bzw. gelbe) Fische gefangen werden sollen, explizit angegeben sind. Bei A hingegen dürfen diese Nummern beliebig sein. Es gilt

$$\#B = n_1 \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_2 = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2}.$$

Somit errechnet sich die Wahrscheinlichkeit von B zu

$$\mathbb{P}[B] = \frac{n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2}}{n^k}.$$

Bei A kann man sich zusätzlich die Versuche, bei denen ein roter Fisch gefangen werden soll, frei aussuchen. Es gibt dafür $\binom{k}{k_1} = \binom{k}{k_2}$ Möglichkeiten. Somit besteht A aus $\binom{k}{k_1}$ disjunkten “Kopien” von B und wir erhalten

$$\#A = \binom{k}{k_1} \cdot \#B = \binom{k}{k_1} \cdot n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2}.$$

Für die Wahrscheinlichkleit von A erhalten wir

$$\mathbb{P}[A] = \binom{k}{k_1} \frac{n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2}}{n^k} = \binom{k}{k_1} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{k_2}.$$

Man sagt, dass die Anzahl der Versuche, bei denen ein roter Fisch gefangen wurde, binomialverteilt ist.
Nun werden wir das obige Beispiel erweitern, indem wir eine beliebige Anzahl an Farben zulassen. Dafür brauchen wir eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten.

Beispiel 2.4.3 (Multinomialkoeffizienten). Es seien k unterscheidbare (z.B. nummerierte) Gegenstände gegeben. Diese will man auf r unterscheidbare (z.B. nummerierte) Schubladen verteilen. In eine Schublade können mehrere Gegenstände gelegt werden. Leere Schubladen sind zugelassen. Zwei Verteilungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Gegenstände innerhalb der Schubladen unterscheiden, gelten als identisch. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Gegenstände auf die Schubladen zu verteilen, so dass die erste Schublade k_1 Gegenstände, die zweite k_2, ..., die r-te Schublade k_r Gegenstände enthält? Dabei seien $k_1, \dots, k_r$ vorgegeben mit $k_1 + \dots + k_r = k$.

Lösung. Die gesuchte Anzahl N ist gegeben durch

$$N = \binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r}.$$

Der Faktor $\binom{k}{k_1}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, die k_1 Gegenstände auszusuchen, die in die erste Schublade gelegt werden sollen. Danach stehen uns nur noch $k - k_1$ Gegenstände zu Verfügung. Der Faktor $\binom{k-k_1}{k_2}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, die k_2 Gegenstände auszuwählen, die in die zweite Schublade gelegt werden sollen. Und so weiter. Übrigens ist der letzte Faktor, nämlich $\binom{k-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r}$, gleich 1, da wir bei der letzten Schublade keine Wahl mehr haben. Dies kann man schreiben als

$$N = \frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} \cdot \frac{(k-k_1)!}{k_2!(k-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(k-k_1-\ldots-k_{r-1})!}{k_r!0!},$$

oder, nachdem Terme gekürzt wurden,

$$N = \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

Definition 2.4.4. Die *Multinomialkoeffizienten* sind definiert durch

$$\binom{k}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

Dabei wird $k_1 + \ldots + k_r = k$ vorausgesetzt.

Bemerkung 2.4.5. Im Spezialfall $r = 2$ haben wir $\binom{k}{k_1,k_2} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k_2}$, mit $k_1 + k_2 = k$.

Satz 2.4.6 (Eigenschaften der Multinomialkoeffizienten). *Es gelten folgende Formeln:*

(1) $\binom{k}{k_1,\ldots,k_r} = \binom{k}{k_1-1,k_2,\ldots,k_r} + \binom{k}{k_1,k_2-1,\ldots,k_r} + \ldots + \binom{k}{k_1,\ldots,k_r-1}$.

(2) $\binom{k}{k_1,\ldots,k_r}$ *ändert sich nicht, wenn man die Zahlen $k_1, \ldots, k_r$ permutiert.*

(3) $(x_1 + \ldots + x_r)^k = \sum_{k_1+\ldots+k_r=k} \binom{k}{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$.

Korollar 2.4.7. *Es gilt* $\displaystyle\sum_{k_1+\ldots+k_r=k} \binom{k}{k_1,\ldots,k_r} = r^k$.

Beispiel 2.4.8. 33 Schüler sollen auf 3 Fußballmannschaften (jeweils 11 Schüler) verteilt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Lösung. Das Problem kann auf zwei verschiedene Weisen verstanden werden. Wenn die 3 Mannschaften (= Schubladen) *unterscheidbar* sind, gibt es

$$\binom{33}{11, 11, 11} = \frac{33!}{(11!)^3} = 136526995463040$$

Möglichkeiten. Unterscheidbar könnte z.B. heißen, dass die erste Mannschaft in der ersten Liga Spielen soll, die zweite in der zweiten, und die dritte in der dritten. In diesem Fall müssen zwei mögliche Verteilungen der Schüler auch dann als verschieden angesehen werden, wenn sie sich nur durch das Permutieren der Mannschaften unterscheiden.
Wenn die 3 Mannschaften *ununterscheidbar* sind, so gibt es weniger Möglichkeiten. Es müssen nämlich jeweils $3! = 6$ Möglichkeiten, die sich nur durch das Permutieren der Mannschaften unterscheiden, als gleich angesehen werden. Die Anzahl der Möglichkeiten ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{3!}\binom{33}{11, 11, 11} = 22754499243840.$$

Beispiel 2.4.9 (Multinomialverteilung). In einem Teich schwimmen n Fische. Jeder dieser Fische hat eine der r möglichen Farben. Die Anzahl der Fische von Farbe i sei mit n_i bezeichnet, wobei $i = 1, \ldots, r$. Dabei gelte $n_1 + \ldots + n_r = n$. Ein Fischer fängt k Fische *mit Zurücklegen*. Bestimme die Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned} A = \text{“es wurden } & k_1 \text{ Fische von Farbe } 1, \\ & k_2 \text{ Fische von Farbe } 2, \\ & \ldots \\ & k_r \text{ Fische von Farbe } r \text{ gefangen”}. \end{aligned}$$

Lösung. Es handelt sich um ein Produktexperiment und somit gilt $\#\Omega = n^k$. Für die Anzahl der Elemente in A gilt

$$\#A = \binom{k}{k_1, \ldots, k_r} \cdot n_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot n_r^{k_r}.$$

Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}[A] = \binom{k}{k_1, \ldots, k_r} \cdot \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n_r}{n}\right)^{k_r}.$$

Beispiel 2.4.10. Es werde 12-mal mit einem fairen Würfel gewürfelt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \text{“Jede der 6 möglichen Augenzahlen wurde genau 2-mal gewürfelt”}.$$

Lösung. Mit $n = 6$, $r = 6$, $k_1 = \ldots = k_6 = 2$, $k = 12$ erhalten wir

$$\mathbb{P}[A] = \binom{12}{2, 2, 2, 2, 2, 2} \frac{1}{6^{12}}.$$