KAPITEL 3

Zufallsvariablen

Ein Zufallsexperiment ergibt oft eine zufällige Zahl. Diese Zahl bezeichnen wir als Zufallsvariable.

Beispiel 3.0.1. Beim zweimaligen Würfeln kann man folgende Zufallsvariablen betrachten: Augensumme, größere Augenzahl, kleinere Augenzahl, Differenz der Augenzahlen, ...

Definition 3.0.2. Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt jede Funktion

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

eine *Zufallsvariable*. Für $\omega \in \Omega$ heißt $X(\omega)$ der Wert von X zum Ausgang ω.

Beispiel 3.0.3. Wir betrachten das zweimalige Würfeln. Die Grundmenge ist dann

$$\Omega = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{1, \dots, 6\}\} = \{1, \dots, 6\}^2.$$

Dann kann man z.B. folgende Zufallsvariablen $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ und $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren:

$$X_1(a_1, a_2) = a_1 \quad (\text{“erste Augenzahl”})$$
$$X_2(a_1, a_2) = a_2 \quad (\text{“zweite Augenzahl”}).$$

Wird z.B. der Ausgang $(2, 6)$ gewürfelt, so nimmt X_1 den Wert 2 und X_2 den Wert 6 an. Definieren wir nun $Y = X_1 + X_2$, dann gilt

$$Y(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \quad (\text{“die Augensumme”}).$$

Sei $Z = \max(X_1, X_2)$, dann gilt

$$Z(a_1, a_2) = \max(a_1, a_2) \quad (\text{“größere Augenzahl”}).$$

Hier sind X_1, X_2, Y, Z Beispiele von Zufallsvariablen.

Definition 3.0.4. Sei $A \subset \Omega$ ein Ereignis. Die Indikatorfunktion von A ist die Zufallsvariable $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$, die wie folgt definiert wird:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Die Indikatorfunktion nimmt den Wert 1 genau dann an, wenn das Ereignis A eintritt. Ansonsten nimmt sie den Wert 0 an.

Bemerkung 3.0.5. Für beliebige Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gelten folgende Eigenschaften:

(1) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.
(2) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$.
(3) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ falls $A \cap B = \emptyset$.
(4) $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \mod 2$.

(5) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c} = 1$ und $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{A^c} = 0$.

Definition 3.0.6. Sei $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die *Zähldichte* oder die *Verteilung* von Z ist die Funktion $p_Z : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit

$$p_Z(y) = \mathbb{P}[Z = y] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = y\}].$$

Mit anderen Worten, $p_Z(y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable Z den Wert y annimmt.

Definition 3.0.7. Sei Z eine Zufallsvariable. Das Bild von Z ist die Menge

$$\mathrm{Im}(Z) = \{y \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega \text{ mit } Z(\omega) = y\}.$$

Mit anderen Worten, $\mathrm{Im}\, Z$ ist die Menge aller Werte von Z. Für $y \notin \mathrm{Im}(Z)$ gilt es $p_Z(y) = 0$.

Bemerkung 3.0.8. Für die Zähldichte gelten folgende zwei Eigenschaften:

(1) $p_Z(y) \in [0, 1]$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
(2) $\sum_{y \in \mathrm{Im}(Z)} p_Z(y) = 1$.

Beispiel 3.0.9. Es sei Z die Augensumme beim Würfeln mit 2 fairen Würfeln. Bestimme die Zähldichte von Z.

Lösung. Die Grundmenge dieses Experiments ist $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ mit $\#\Omega = 36$. Die Menge der Werte, die Z annehmen kann, ist $\mathrm{Im}(Z) = \{2, \ldots, 12\}$. Nun bestimmen wir die Zähldichte von Z:

$$\begin{aligned} p_Z(2) &= \mathbb{P}[Z = 2] = \frac{1}{36}, \\ p_Z(3) &= \mathbb{P}[Z = 3] = \frac{2}{36}, \\ &\vdots \\ p_Z(7) &= \mathbb{P}[Z = 7] = \frac{6}{36}, \\ &\vdots \\ p_Z(11) &= \mathbb{P}[Z = 11] = \frac{2}{36}, \\ p_Z(12) &= \mathbb{P}[Z = 12] = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt

$$p_Z(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{36}, & y \in \{2, \ldots, 7\}, \\ \frac{12-(y-1)}{36}, & y \in \{7, \ldots, 12\}. \end{cases}$$

Beispiel 3.0.10. Sei $A \subset \Omega$ ein Ereignis und $Z = \mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion von A. Für die Zähldichte von Z gilt:

$$p_Z(y) = \begin{cases} 1 - \mathbb{P}[A], & y = 0, \\ \mathbb{P}[A], & y = 1, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$