KAPITEL 4

Unabhängigkeit

4.1. Unabhängigkeit von Ereignissen

Wir stellen uns vor, dass zwei Personen jeweils eine Münze werfen. In vielen Fällen kann man annehmen, dass die eine Münze die andere nicht beeinflusst (d.h., es gibt keine Interaktion zwischen den Münzen). Das bedeutet, dass jedes Ereignis, das mit der ersten Münze zusammenhängt, von jedem Ereignis der anderen Münze unabhängig ist.
Welche Ereignisse sind dann abhängig? Man stelle sich vor, die beiden Münzen sind durch einen Stab miteinander verbunden, sodass sie immer das gleiche Symbol zeigen. In diesem Fall hängt das Symbol, das die erste Münze zeigt, vom Symbol der zweiten Münze ab.
Nun stellen wir uns vor, dass die erste Münze in 60% aller Fälle Kopf zeigt, während die zweite Münze in 50% aller Fälle Kopf zeigt. Sind die Münzen unabhängig, so müsste das Ereignis "beide Münzen zeigen Kopf" in 50% derjenigen Fälle eintreten, wo die erste Münze Kopf zeigt. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass beide Münzen Kopf zeigen, sollte sich als das Produkt $0.6 \cdot 0.5$ errechnen. Wir werden diese Überlegung als eine Definition benutzen.

Definition 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subset \Omega$ zwei Ereignisse. Dann heißen A und B *unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]. \tag{4.1.1}$$

Wenn dies nicht gilt, heißen die Ereignisse A und B abhängig.

Es zeigt sich, dass manche Ereignisse, die im ersten Moment abhängig erscheinen, doch unabhängig sind.

Beispiel 4.1.2. Wir betrachten das einmalige Werfen eines fairen Würfels und legen folgende Ereignisse fest:

$$A = \text{"Augenzahl ist } \geq 5\text{"} = \{5, 6\}, \quad B = \text{"Augenzahl ist gerade"} = \{2, 4, 6\}.$$

Es gilt dann

$$\mathbb{P}[A] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}[B] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Sind diese beiden Ereignisse nun unabhängig oder nicht? Es gilt $A \cap B = \{6\}$ und somit

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B].$$

Es folgt, dass A und B per Definition unabhängig sind (obwohl es intuitiv nicht so scheint). Betrachte nun zusätzlich das Ereignis

$$C = \text{"Augenzahl ist } \geq 4\text{"} = \{4, 5, 6\}.$$

Man sieht, dass $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{1}{2}$, während $\mathbb{P}[B \cap C] = \frac{2}{6} \neq \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C]$. Ereignisse B und C sind somit abhängig.

Beispiel 4.1.3. Wir betrachten das Würfeln mit 3 fairen Würfeln. Die Würfel muss man sich immer als unterscheidbar vorstellen. Beispielsweise, kann man sie mit verschiedenen Farben färben. Dieses Experiment ergibt 3 Augenzahlen. Die Grundmenge dieses Experiments ist $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$ mit $\#\Omega = 6^3$. Nun können wir 3 Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 definieren:

$$X_i : \Omega \to \mathbb{R}, \;\; X_i(a_1, a_2, a_3) = a_i = \text{“Augenzahl, die Würfel } i \text{ zeigt”},$$

wobei $i = 1, 2, 3$ und $a_1, a_2, a_3 \in \{1, \dots, 6\}$. Nun definieren wir zwei Ereignisse A und B:

$$A = \{X_1 = X_2\} = \text{“die ersten beiden Würfel zeigen die gleiche Augenzahl”},$$
$$B = \{X_2 = X_3\} = \text{“der zweite und dritte Würfel zeigen die gleiche Augenzahl”}.$$

Sind die Ereignisse A und B nun unabhängig oder abhängig? Es scheint, dass beide Ereignisse von der zweiten Augenzahl X_2 abhängen. Dennoch sind sie unabhängig, was wir nun nachweisen. Es gilt

$$A = \{(a, a, b) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\},$$
$$B = \{(a, b, b) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}.$$

Somit erhalten wir, dass $\#A = \#B = 6^2$ und

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}.$$

Für das Ereignis $A \cap B$ gilt

$$A \cap B = \{X_1 = X_2 = X_3\} = \{(a, a, a) : a \in \{1, \dots, 6\}\}.$$

Somit erhalten wir $\#(A \cap B) = 6$ und

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B].$$

Daher sind die Ereignisse A und B per Definition unabhängig.

Bemerkung 4.1.4. Disjunktheit und Unabhängigkeit sind völlig verschiedene Begriffe. Disjunkte Ereignisse sind nämlich niemals unabhängig (außer eines der Ereignisse hat die Wahrscheinlichkeit 0). Wir beweisen das. Seien A und B disjunkt (d.h. $A \cap B = \emptyset$) mit $\mathbb{P}[A] \neq 0$ und $\mathbb{P}[B] \neq 0$. Aus unseren Annahmen folgt, dass

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0 \neq \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B].$$

Somit sind A und B abhängig.

Bemerkung 4.1.5. Ereigniss Ω ist von jedem Ereignis A unabhängig, denn

$$\mathbb{P}[\Omega \cap A] = \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[\Omega], \;\text{ da } \mathbb{P}[\Omega] = 1.$$

Ereignis $\emptyset$ ist ebenfalls von jedem Ereignis A unabhängig, denn

$$\mathbb{P}[\emptyset \cap A] = \mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[\emptyset], \;\text{ da } \mathbb{P}[\emptyset] = 0.$$

Die beiden Aussagen sind ziemlich natürlich. Zum Beispiel tritt das sichere Ereignis Ω immer ein, unabhängig davon, ob irgend ein anderes Ereignis A eintritt oder nicht.

Wir haben definiert, wann *zwei* Ereignisse unabhängig sind. Nun wollen wir definieren, wann *viele* Ereignisse unabhängig sind.

Definition 4.1.6. Eine Familie $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ von Ereignissen heißt *unabhängig*, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Indizes $i_1 < \ldots < i_k$ gilt, dass

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_{i_k}]. \tag{4.1.2}$$

Definition 4.1.7. Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ heißen *paarweise unabhängig*, wenn für alle $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \neq i_2$ gilt:

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] \cdot \mathbb{P}[A_{i_2}]. \tag{4.1.3}$$

Unabhängige Ereignisse sind paarweise unabhängig. Das folgt aus den beiden Definitionen. Wir wollen nun an einem Beispiel zeigen, dass die Umkehrung nicht gilt.

Beispiel 4.1.8. Wir betrachten das Würfeln mit 3 fairen Würfeln. Wir bezeichnen mit X_i die Augenzahl, die der i-te Würfel zeigt, wobei $i = 1, 2, 3$. Wir legen die Ereignisse A, B und C wie folgt fest:

$$A = \{X_1 = X_2\}, \;\; B = \{X_2 = X_3\}, \;\; C = \{X_3 = X_1\}.$$

Wir haben bereits in Beispiel 4.1.3 gezeigt, dass A und B unabhängig sind. Analog sind auch A und C unabhängig, und das Gleiche gilt für B und C. Somit sind Ereignisse A, B, C paarweise unabhängig.
Wir zeigen nun, dass die Familie A, B, C nicht unabhängig ist. Der Schnitt der 3 Mengen ist gegeben durch:

$$A \cap B \cap C = \{X_1 = X_2 = X_3\} = \{(a, a, a) : a \in \{1, \ldots, 6\}\}.$$

Somit gilt $\#(A \cap B \cap C) = 6$. Die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge $A \cap B \cap C$ ist somit

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} \neq \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3}$$

Die Familie A, B, C ist paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig.

Bemerkung 4.1.9. Von nun an wird nur noch der Begriff der Unabhängigkeit benutzt. Die paarweise Unabhängigkeit spielt keine Rolle in der Zukunft.

Satz 4.1.10. *Es seien $A, B \subset \Omega$ zwei unabhängige Ereignisse. Dann gilt:*

1. *A und B^c sind unabhängig.*
2. *A^c und B sind unabhängig.*
3. *A^c und B^c sind unabhängig.*

Beweis. Wir zeigen, dass A und B^c unabhängig sind. Wir setzen $\mathbb{P}[A] = p$, $\mathbb{P}[B] = q$. Da A und B unabhängig sind, folgt $\mathbb{P}[A \cap B] = p \cdot q$. Somit gilt

$$\mathbb{P}[A \cap B^c] = \mathbb{P}[A \backslash B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B] = p - p \cdot q = p \cdot (1 - q) = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B^c].$$

Es folgt, dass A und B^c unabhängig sind. Die beiden anderen Aussagen lassen sich analog beweisen. □

Satz 4.1.11. *Es seien $A, B, C \subset \Omega$ unabhängig Ereignisse. Dann gilt*

1. *$A, B \cup C$ sind unabhängig.*
2. *$A, B \cap C$ sind unabhängig.*

Beweis. Übung. $\square$

Bemerkung 4.1.12. Diese Aussage kann auch verallgemeinert werden. Betrachte eine unabhängige Familie von Ereignissen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$. Es sei A irgendein Ereignis, das aus Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$ durch die Anwendung von mengentheoretischen Operationen $\cup$, $\cap$, ^{c} in irgendeiner Reihenfolge entsteht. Sei B ein Ereignis, das aus $B_1, \ldots, B_m$ durch Anwendung von $\cup$, $\cap$, ^{c} entsteht. Dann sind A und B unabhängig.

4.2. Produkträume

Wir betrachten n Experimente $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ mit Wahrscheinlichkeitsfunktionen

$$p_i(a) = \mathbb{P}_i(\{a\}), \quad a \in \Omega_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wir stellen uns nun vor, dass diese Experimente unabhängig voneinander ausgeführt werden. Die Unabhängigkeit kann man beispielsweise erreichen, indem man die Experimente räumlich voneinander trennt.

Werden nun alle Experimente ausgeführt, so ist die Grundmenge gegeben durch

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \Omega_i\}.$$

Wegen der Unabhängigkeit liegt es nun nahe, die Wahrscheinlichkeit eines Ausgangs $(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ wie folgt zu definieren:

$$p(a_1, \ldots, a_n) \overset{def}{=} p_1(a_1) \cdot p_2(a_2) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n),$$

wobei $p_i(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs $a_i \in \Omega_i$ im i-ten Experiment ist. Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses $A \subset \Omega$ definieren wir dann wie folgt:

$$\mathbb{P}[A] \overset{def}{=} \sum_{a \in A} p(a).$$

Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ heißt der *Produktraum* von $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ und wird auch mit $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_n)$ bezeichnet.

Beispiel 4.2.1. Wir betrachten Ereignisse $A_1 \subset \Omega_1, \ldots, A_n \subset \Omega_n$. Das Ereignis A_i ist somit mit Experiment i verbunden. Nun betrachten wir das folgende Ereignis: "Im ersten Experiment tritt A_1 ein, im zweiten Experiment tritt A_2 ein, usw.". Dieses Ereignis kann man auch wie folgt darstellen:

$$A_1 \times \ldots \times A_n \overset{def}{=} \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\} \subset \Omega.$$

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n] &= \sum_{(a_1,\ldots,a_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n} p(a_1, \ldots, a_n) \\
&= \sum_{a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n} p_1(a_1) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n) \\
&= \left(\sum_{a_1 \in A_1} p(a_1) \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{a_n \in A_n} p(a_n) \right) \\
&= \mathbb{P}_1[A_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n[A_n].
\end{aligned}$$

4.3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 4.3.1. Stellen wir uns vor, dass jemand mit 2 fairen Würfeln würfelt. Die Grundmenge ist $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Wir betrachten zwei Ereignisse:

$$A = \text{“erster Würfel zeigt 6”} = \{(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\},$$
$$B = \text{“Augensumme} = 10\text{”} = \{(6,4), (5,5), (4,6)\}.$$

Stellen wir uns vor, dass das Experiment durchgeführt wurde und dass uns mitgeteilt wurde, dass das Ereignis B eingetreten ist. Ob das Ereignis A eingetreten ist, wissen wir aber nicht. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit von A bestimmen, gegeben, dass B eingetreten ist. So etwas nennt man “bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B” und bezeichnet mit $\mathbb{P}[A|B]$. Da B eingetreten ist, kommen nur Ausgänge $\{(6,4), (5,5), (4,6)\}$ in Frage. Alle anderen Ausgänge sind durch die Information, dass B eingetreten ist, ausgeschlossen. Die Grundmenge hat sich also auf das Ereignis B verkleinert. Von den drei gleichwahrscheinlichen Ausgängen $\{(6,4), (5,5), (4,6)\}$ führt aber nur der Ausgang $(6,4)$ zum Eintreten von A. Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B ist also

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{3}.$$

Zum Vergleich: die Wahrscheinlichkeit von A ohne Bedingungen ist $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{6}$.

Definition 4.3.2. Seien $A, B \subset \Omega$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[B] \neq 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B* ist definiert durch

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}. \tag{4.3.1}$$

Bemerkung 4.3.3. Beachte: $A|B$ ist kein Ereignis, sondern lediglich eine Notation für eine neue Art von Wahrscheinlichkeit.

Satz 4.3.4. *Sei $B \subset \Omega$ ein Ereignis mit $\mathbb{P}[B] \neq 0$.*

(1) *Für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $\mathbb{P}[A|B] \in [0,1]$.*
(2) *Es gilt $\mathbb{P}[\Omega|B] = \mathbb{P}[B|B] = 1$ und $\mathbb{P}[\emptyset|B] = 0$.*
(3) *Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i|B].$$

(4) *Für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $\mathbb{P}[A^c|B] = 1 - \mathbb{P}[A|B]$.*
(5) *Sind Ereignisse A und B unabhängig, so gilt $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$.*

Beweis. Zu (1): Folgt aus $0 \leq \mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[B]$ und (4.3.1). Zu (3):

$$\mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right] = \frac{\mathbb{P}\left[(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B\right]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[A_i \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i|B].$$

Zu (5): Sind A und B unabhängig, so heißt es, dass $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Es folgt, dass

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]} = \mathbb{P}[A].$$

$\square$

Bemerkung 4.3.5. Aus (4.3.1) sieht man, dass $\mathbb{P}[A|B]$ und $\mathbb{P}[B|A]$ im Allgemeinen nicht gleich sein müssen.

Satz 4.3.6 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit). *Die Grundmenge sei als $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ dargestellt, wobei $B_1, \ldots, B_n$ paarweise disjunkte Ereignisse sind und $\mathbb{P}[B_i] \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei $A \subset \Omega$ ein weiteres Ereignis. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit von A:*

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i].$$

Beweis. Das Ereignis A ist eine disjunkte Vereinigung der Ereignisse $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_n$. Somit gilt

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i].$$

$\square$

Beispiel 4.3.7 (Grippetest). Bei einer kranken Person schlägt ein Grippeschnelltest mit Wahrscheinlichkeit 0.9 an. Bei einer gesunden Person kann der Test allerdings ebenfalls anschlagen, und zwar mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.2. Wenn nun 1% aller Personen in einer Population tatsächlich krank sind, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer zufällig gewählten Person anschlägt?

Lösung. Wir legen zunächst passende Ereignisse fest:

$$\begin{aligned} A &= \text{“Person wird positiv getestet”}, \\ B_1 &= \text{“Person hat Grippe”}, \\ B_2 &= \text{“Person hat keine Grippe”}. \end{aligned}$$

Also sind die Ereignisse B_1 und B_2 disjunkt, d.h. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, und es gilt $\Omega = B_1 \cup B_2$. Laut Aufgabenstellung gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A|B_1] &= 0.9, \\ \mathbb{P}[A|B_2] &= 0.2. \end{aligned}$$

Da zusätzlich noch bekannt ist, dass 1% aller Personen krank sind, gilt außerdem:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_1] &= 0.01, \\ \mathbb{P}[B_2] &= 1 - 0.01 = 0.99. \end{aligned}$$

Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A|B_1] \cdot \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2] \cdot \mathbb{P}[B_2] = 0.9 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.99 = 0.207.$$

Eine Person wird also mit Wahrscheinlichkeit 0.207 positiv getestet.

SATZ 4.3.8 (Bayes-Formel). *Die Grundmenge sei als $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ dargestellt, wobei $B_1, \ldots, B_n$ paarweise disjunkte Ereignisse sind und $\mathbb{P}[B_i] \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei $A \subset \Omega$ ein weiteres Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A] \neq 0$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$:*

$$\mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_k] \cdot \mathbb{P}[B_k]}. \tag{4.3.2}$$

BEWEIS. Wir wenden die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (4.3.1) zweimal an:

$$\mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[B_i \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A \cap B_i]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\mathbb{P}[A]}$$

Das beweist die erste Hälfte von (4.3.2). Die zweite Hälfte folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit. □

BEISPIEL 4.3.9 (Fortsetzung von Beispiel 4.3.7). Eine Person, über die nicht bekannt ist, ob sie gesund oder krank ist, wurde positiv getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie tatsächlich krank?

LÖSUNG. Gegeben ist, dass die Person positiv getestet wurde. Das Ereignis A ist also eingetreten. Gegeben diese Information wollen wir wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ereignis B_1 eintritt. Gefragt wird also nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[B_1|A]$. Die Bayes-Formel (4.3.2) ergibt

$$\mathbb{P}[B_1|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_1] \cdot \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.207} \approx 0.043.$$

Wir erkennen also, dass dieser Schnelltest ziemlich schlecht ist. Man kann auch die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass eine Person gesund ist, gegeben, dass sie positiv getestet wurde:

$$\mathbb{P}[B_2|A] = 1 - \mathbb{P}[B_1|A] \approx 1 - 0.043 \approx 0.957.$$

4.4. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Wir haben Unabhängigkeit von Ereignissen definiert. Man kann aber auch Unabhängigkeit von Zufallsvariablen definieren. Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

DEFINITION 4.4.1. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}[X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n] = \mathbb{P}[X_1 = y_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[X_n = y_n]. \tag{4.4.1}$$

Diese Definition lässt sich in folgender äquivalenter Form darstellen.

SATZ 4.4.2. *Seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(1) *Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig.*
(2) *Für beliebige Mengen $B_1, \ldots, B_n \subset \mathbb{R}$ gilt:*

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[X_n \in B_n]. \tag{4.4.2}$$

(3) *Die Ereignisse $\{X_1 = y_1\}, \ldots, \{X_n = y_n\}$ sind unabhängig für alle $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.*
(4) *Die Ereignisse $\{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_n \in B_n\}$ sind unabhängig für alle $B_1, \ldots, B_n \subset \mathbb{R}$.*

Wenn man jedoch eine unendliche Familie von Zufallsvariablen betrachtet, dann heißen diese Zufallsvariablen unabhängig, wenn jede endliche Teilfamilie unabhängig ist.

Definition 4.4.3. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ heißen unabhängig, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind.

Beispiel 4.4.4. Wir würfeln n-mal mit einem fairen Würfel. Die Grundmenge lautet $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n$ und wir gehen von der Laplace-Annahme aus, dass alle Ausgänge in Ω die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/6^n$ haben. Wir bezeichnen mit X_i die Augenzahl beim i-ten Wurf:

$$X_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i, \ \ (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega.$$

Wir zeigen nun, dass die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind. (Das ist im Einklang mit dem gesunden Verstand). Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n] &= \begin{cases} \frac{1}{6^n}, & \text{falls } y_1, \ldots, y_n \in \{1, \ldots, 6\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mathbb{P}[X_1 = y_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[X_n = y_n].\end{aligned}$$

Beispiel 4.4.5. In diesem Beispiel betrachten wir die Augensumme $S = X_1 + \ldots + X_n$. Wir zeigen, dass die Zufallsvariablen S und X_1 abhängig sind. Zu diesem Zweck müssen wir einen Fall finden, für den die Produktformel nicht gilt. Wir betrachten die Ereignisse $\{X_1 = 1\}$ und $\{S = 6n\}$. Die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse sind strikt positiv:

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{6}, \ \ \mathbb{P}[S = 6n] = \frac{1}{6^n}.$$

Auf der anderen Seite, können beide Ereignisse gleichzeitig nicht eintreten, somit

$$\mathbb{P}[X_1 = 1, S = 6n] = 0.$$

Daraus folgt dann, dass S und X_1 abhängig sind.

Bemerkung 4.4.6. Es sei $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen. Man kann zeigen, dass für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Zufallsvariablen $f(X_1, \ldots, X_n)$ und $g(Y_1, \ldots, Y_m)$ unabhängig sind.