KAPITEL 5

Erwartungswert

Wir betrachten einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Die Grundmenge Ω hat also nur endlich oder abzählbar viele Elemente. Für die Zufallsvariable X bedeutet es, dass sie nur endlich oder abzählbar viele Werte annehmen kann. Diese Werte kann man aufzählen:

$$\begin{array}{rcccc} \text{Werte von } X: & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots \\ \text{Wahrscheinlichkeiten}: & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{array}$$

Dabei bezeichnen wir mit $p_i = \mathbb{P}[X = y_i]$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X = y_i\}$. Es gilt dann

(1) $p_i \in [0, 1]$ für alle i.
(2) $\sum_i p_i = 1$.

Definition 5.1. Die Zufallsvariable X heißt *integrierbar*, wenn $\sum_i p_i |y_i| < \infty$. Ist X integrierbar, so definieren wir den *Erwartungswert* von X wie folgt:

$$\mathbb{E}X \stackrel{def}{=} \sum_i p_i y_i. \tag{5.1}$$

Bemerkung 5.2. Nimmt X nur endlich viele Werte an, so ist die Bedingung $\sum_i p_i |y_i| < \infty$ erfüllt und X ist integrierbar.

Bemerkung 5.3. Eine Reihe $\sum_i a_i$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_i |a_i| < \infty$. Es ist bekannt, dass eine absolut konvergente Reihe konvergiert, und dass die Summe einer absolut konvergenten Reihe von der Reihenfolge der Summanden unabhängig ist. In der Definition des Erartungswerts fordern wir die absolute Konvergenz der Reihe $\sum p_i y_i$. Diese Forderung stellt sicher, dass die Summe dieser Reihe nicht von der Reihenfolge der Terme in abhängt.

Bei Reihen, die nicht absolut konvergieren, kann sich die Summe ändern, wenn man die Reihenfolge der Summanden ändert.

Beispiel 5.4. Betrachte die alternierende harmonische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots = \ln 2. \tag{5.2}$$

Beweis: Setze $x = 1$ in der Formel $\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$. Diese Reihe ist konvergent (gegen $\ln 2$), aber nicht absolut konvergent, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Nun betrachte die Reihe:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots = \frac{3}{2} \log 2. \tag{5.3}$$

Beweis: Übung. Die Summen der Reihen (5.2) und (5.3) sind unterschiedlich. Dabei haben beide Reihen die gleichen Summanden, lediglich die Reihenfolge der Summanden ist unterschiedlich.

Bemerkung 5.5. Die Definition des Erwartungswertskann man auch so schreiben:

$$\mathbb{E}X = \sum_{y \in \mathrm{Im}(X)} y \cdot \mathbb{P}[X = y],$$

falls die Reihe absolut konvergiert.

Beispiel 5.6. Wir würfeln mit einem fairen Würfel. Sei X die Augenzahl. Der Erwartungswert von X ist

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{6}(1 + \ldots + 6) = 3,5.$$

Beispiel 5.7. Sei $A \subset \Omega$ ein Ereignis. Es sei $X = \mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion von A. Die Indikatorfunktion nimmt den Wert 1 genau dann an, wenn das Ereignis eingetreten ist. Ansonsten nimmt sie den Wert 0 an. Demnach gilt:

$$\mathbb{E}\mathbb{1}_A = 0 \cdot \mathbb{P}[\mathbb{1}_A = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[\mathbb{1}_A = 1] = 0 \cdot (1 - \mathbb{P}[A]) + 1 \cdot \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A].$$

Satz 5.8. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann ist X integrierbar genau dann, wenn*

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)|X(\omega)| < \infty. \tag{5.4}$$

Ist (5.4) erfüllt, so gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)X(\omega). \tag{5.5}$$

Beweis. Für jedes $y \in \mathrm{Im}(X)$ definieren wir das Ereignis

$$A_y \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega | X(\omega) = y\}.$$

Es gilt dann:

(1) $\Omega = \cup_{y \in \mathrm{Im}(X)} A_y$.
(2) Die Ereignisse A_y sind paarweise disjunkt.

Laut Definition ist X integrierbar genau dann, wenn

$$\sum_{y \in \mathrm{Im}(X)} |y| \cdot \mathbb{P}[X = y] < \infty. \tag{5.6}$$

Bei Reihen mit nicht-negativen Termen kann man die Summanden vertauschen, ohne dass sich die Summe ändert. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\sum_{y \in \mathrm{Im}(X)} |y| \cdot \mathbb{P}[X = y] &= \sum_{y \in \mathrm{Im}(X)} |y| \cdot \sum_{\omega \in A_y} p(\omega) \\ &= \sum_{y \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{\omega \in A_y} p(\omega)|X(\omega)| \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)|X(\omega)|.\end{aligned}$$

Somit sind Bedingungen (5.4) und (5.6) äquivalent. Es folgt, dass X genau dann integrierbar ist, wenn (5.4) gilt.

Nun nehmen wir an, dass (5.4) gilt. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{y\in\mathrm{Im}(X)} y\cdot\mathbb{P}[A_y]\\ &= \sum_{y\in\mathrm{Im}(X)} y\cdot\sum_{\omega\in A_y} p(\omega)\\ &= \sum_{y\in\mathrm{Im}(X)}\sum_{\omega\in A_y} p(\omega)X(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)X(\omega).\end{aligned}$$

Die absolute Konvergenz wurde hier dadurch benutzt, dass die Summanden vertauscht wurden. □

Satz 5.9 (Linearität des Erwartungswerts). (1) *Seien $X, Y : \Omega\to\mathbb{R}$ integrierbare Zufallsvariablen. Dann ist $X+Y$ integrierbar uns es gilt*

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y). \tag{5.7}$$

(2) *Sei $X : \Omega\to\mathbb{R}$ eine integrierbare Zufallsvariable. Sei $a\in\mathbb{R}$. Dann ist aX integrierbar und es gilt*

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}X. \tag{5.8}$$

Beweis. Teil 1: Wir zeigen, dass $X+Y$ integrierbar ist:

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)|X(\omega)+Y(\omega)| &\le \sum_{\omega\in\Omega}(p(\omega)|X(\omega)|+p(\omega)|Y(\omega)|)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)|X(\omega)| + \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)|Y(\omega)|.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist endlich, da X und Y integrierbar sind. Somit ist auch die linke Seite endlich. Es folgt, dass $X+Y$ integrierbar ist.
Wir berechnen nun $\mathbb{E}(X+Y)$. Mit Satz 5.8 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\,(X(\omega)+Y(\omega))\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}(p(\omega)X(\omega)+p(\omega)Y(\omega))\\ &= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)X(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)Y(\omega)\\ &= \mathbb{E}X+\mathbb{E}Y.\end{aligned}$$

Auch hier haben wir die absolute Konvergenz benutzt, indem wir die Summanden vertauscht haben.
Beweis von Teil 2 ist analog. □

Bemerkung 5.10. Der eben bewiesene Satz gilt auch für n Summanden: sind $X_1,\ldots,X_n : \Omega\to\mathbb{R}$ integrierbare Zufallsvariablen, so ist auch die Summe $X_1+\ldots+X_n$ integrierbar und es gilt

$$\mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n].$$

Beispiel 5.11. Wir würfeln n-mal mit einem fairen Würfel. Sei X_i die Augenzahl bei Wurf i, wobei $i = 1, \ldots, n$. Es sei $S = X_1 + \ldots + X_n$ die Augensumme. Dann gilt für den Erwartungswert von S:

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n = n \cdot \mathbb{E}X_1 = 3,5 \cdot n.$$

Beispiel 5.12 (Lotto). In einer Urne liegen 49 nummerierte Kugeln, es werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wir tippen auf 6 verschiedene Kugeln. Es sei S die Anzahl der Richtigen. Bestimme den Erwartungswert von S.

Lösung. Wir tippen oBdA auf die Kombination $\{1, \ldots, 6\}$. Dann definieren wir die Zufallsvariablen

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Kugel } i \text{ gezogen wurde,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Für den Erwartungswert von X_i gilt:

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{48 \cdot \ldots \cdot 44}{5 \cdot \ldots \cdot 1}}{\frac{49 \cdot \ldots \cdot 44}{6 \cdot \ldots \cdot 1}} = \frac{6}{49}.$$

Die Anzahl der Richtigen ist dann $S = X_1 + \ldots + X_6$. Mit Satz 5.9 gilt für den Erwartungswert von S:

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_6 = 6 \cdot \frac{6}{49} = \frac{36}{49}.$$

Satz 5.13. *Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige integrierbare Zufallsvarieblen. Dann ist auch das Produkt $X \cdot Y$ integrierbar und es gilt*

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]. \tag{5.9}$$

Beweis. Seien $a_1, a_2, \ldots$ alle Werte von X mit dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots$. Analog seien $b_1, b_2, \ldots$ alle Werte von Y mit Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, \ldots$.

X	a_1	a_2	$\ldots$
$\mathbb{P}[X]$	p_1	p_2	$\ldots$

Y	b_1	b_2	$\ldots$
$\mathbb{P}[Y]$	q_1	q_2	$\ldots$

Nun definieren wir das Ereignis A_{ij}, welches eintritt, wenn X den Wert a_i annimmt und gleichzeitig Y den Wert b_j:

$$A_{ij} = \{X = a_i, Y = b_j\}.$$

Dann bilden die Ereignisse A_{ij} eine disjunkte Zerlegung von Ω. Die Wahrscheinlichkeit von A_{ij} ist, wegen der Unabhängigkeit von X und Y,

$$\mathbb{P}[A_{ij}] = \mathbb{P}[X = a_i] \cdot \mathbb{P}[Y = b_j] = p_i \cdot q_j.$$

Wir zeigen, dass XY integrierbar ist:

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\cdot|X(\omega)\cdot Y(\omega)| &= \sum_{i,j}\sum_{\omega\in A_{i,j}} p(\omega)\cdot|X(\omega)\cdot Y(\omega)| \\
&= \sum_{i,j}\sum_{\omega\in A_{i,j}} p(\omega)|a_i||b_j| \\
&= \sum_{i,j} |a_i||b_j|\cdot\sum_{\omega\in A_{ij}} p(\omega) \\
&= \sum_{i,j} |a_i||b_j|\cdot\mathbb{P}[A_{ij}] \\
&= \sum_{i,j} |a_i||b_j|\cdot p_i q_j \\
&= \sum_{i,j} |a_i|p_i\cdot|b_j|q_j \\
&= \left(\sum_i |a_i|p_i\right)\cdot\left(\sum_j |b_j|q_j\right).
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist endlich, da X und Y integrierbar sind. Somit ist auch die linke Seite endlich. Mit Satz 5.8 folgt, dass XY integrierbar ist.
Für den Erwartungswert von $X\cdot Y$ gilt nun mit Satz 5.8:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X\cdot Y] &= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\cdot X(\omega)\cdot Y(\omega) \\
&= \sum_{i,j}\sum_{\omega\in A_{i,j}} p(\omega)\cdot X(\omega)\cdot Y(\omega) \\
&= \sum_{i,j}\sum_{\omega\in A_{i,j}} p(\omega)\cdot a_i\cdot b_j \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j \sum_{\omega\in A_{ij}} p(\omega) \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j\cdot\mathbb{P}[A_{ij}] \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j\cdot p_i q_j \\
&= \sum_{i,j} a_i p_i\cdot b_j q_j \\
&= \left(\sum_i a_i p_i\right)\cdot\left(\sum_j b_j q_j\right) \\
&= \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y.
\end{aligned}$$

Die absolute Konvergenz haben wir dabei mehrmals benutzt, indem wir die Summanden vertauscht haben. $\square$

Bemerkung 5.14. Der eben bewiesene Satz gilt auch für n Faktoren: sind $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige integrierbare Zufallsvariablen, so ist auch das Produkt $X_1 \dots X_n$ integrierbar und es gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$