KAPITEL 7

Wahrscheinlichkeitstheorie und Maßtheorie

7.1. Vorüberlegungen

Die folgenden drei Beispiele sind Spezialfälle des Oberbegriffs *Maß*.

Beispiel 7.1.1 (Verteilung der Ladung oder der Masse). Man stelle sich eine positive elektrische Ladung, die sich über eine Menge Ω verteilt hat. Dabei kann Ω zum Beispiel ein Gebiet im drei- oder zweidimensionalen Raum sein. Ist A eine Teilmenge von Ω, so kann man mit $\mu(A)$ die Gesamtladung bezeichnen, die sich in der Menge A befindet. Da wir nur positive Ladungen betrachten, kann $\mu(A)$ nur Werte im Bereich $[0, +\infty]$ annehmen. Dabei ist der Wert $+\infty$ zugelassen. Außerdem kann man davon ausgehen, dass die folgende Eigenschaft, genannt σ-*Additivität*, gilt: Für beliebige paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ gilt

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Das bedeutet, dass sich die Gesamtladung einer disjunkten Vereinigung $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ als die Summe der Ladungen der einzelnen Mengen A_i ausrechnen lässt. Analog kann man sich anstatt einer Verteilung der Ladung auch eine Verteilung der Masse im Gebiet Ω vorstellen. In diesem Fall ist $\mu(A)$ die Masse der Menge A.

Beispiel 7.1.2 (Wahrscheinlichkeit). Man stelle sich ein Zufallsexperiment mit Grundmenge Ω vor. In diesem Fall kann man mit $\mathbb{P}[A]$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \subset \Omega$ bezeichnen. Wir werden als Axiom annehmen, dass die σ-Additivität gilt: Für beliebige paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}[\cup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i].$$

Außerdem gilt noch eine Eigenschaft, die Normiertheit genannt wird: $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.

Beispiel 7.1.3 (Volumen, Flächeninhalt, Länge). Für eine Menge A im dreidimensionalen Raum kann man mit $\lambda(A)$ das Volumen von A bezeichnen. Das Volumen $\lambda(A)$ nimmt Werte in $[0, +\infty]$ an. Man kann hoffen, dass die σ-Additivität gilt: Für beliebige paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\lambda(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

Analog kann man im zweidimensionalen Raum den Flächeninhalt, im eindimensionalen Raum die Länge, und allgemeiner im d-dimensionalen Raum das d-dimensionale Volumen betrachten.

Die oben genannten Begriffe werden in der Maßtheorie als Spezialfälle des Begriffs Maß exakt definiert. Erstaunlicherweise stellt es sich heraus, dass sich der Begriff “Volumen” nicht für alle Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ vernünftig erklären lässt, sondern nur für sogenannte Borel-Mengen. Diese werden im Folgenden definiert. Analog kann man in einigen Situationen die Wahrscheinlichkeit nicht für alle Ereignisse erklären, sondern nur für sogenannte messbare Ereignisse. Bislang haben wir nur Experimente mit einer endlichen oder abzählbaren Grundmenge betrachtet. Die Frage der Messbarkeit spielt für solche Experimente keine Rolle. Es gibt aber auch Experimente mit einer überabzählbaren Grundmenge, Beispiele werden im Folgenden gegeben.

7.2. Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten hier einige Beispiele von Experimenten mit einer überabzählbaren Grundmenge.

Beispiel 7.2.1. Sei Ω ein Quadrat in der Ebene. Stellen wir uns vor, dass jemand zufällig einen Punkt S im Quadrat Ω auswählt. Wie kann man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, dass S in einer Teilmenge $A \subset \Omega$ (zum Beispiel, einem kleineren Quadrat) landet? Früher haben wir den Laplace-Ansatz benutzt:

$$\mathbb{P}[S \in A] = \frac{\#A}{\#\Omega}, \tag{7.2.1}$$

wobei $\#A$ für die Anzahl der Elemente in A steht. In diesem Beispiel funktioniert der Ansatz allerdings nicht, denn $\#A = \#\Omega = \infty$. Anstatt 7.2.1 ist es natürlich, die folgende Formel zu verwenden:

$$\mathbb{P}[S \in A] = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}, \tag{7.2.2}$$

wobei $\lambda(A)$ der Flächeninhalt von A ist. Gilt (7.2.2), so sagen wir, dass der Punkt S *gleichverteilt* in Ω ist.
Beachte, dass der Flächeninhalt eines einzelnen Punktes gleich Null ist und demnach gilt für jeden einzelnen Punkt $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{P}[S = \omega] = 0.$$

Beispiel 7.2.2. Ein Zufallsgenerator erzeugt zwei zufällige reelle Zahlen x, y zwischen 0 und 1 unabhängig voneinander. Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass

$$x + y < 1.$$

Lösung. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist das Einheitsquadrat:

$$\Omega = [0,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,1]\}.$$

Das Ereignis A können wir wie folgt darstellen:

$$A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x + y < 1\}.$$

Von einem idealen Zufallsgenerator erwartet man, dass der Punkt $S = (x,y)$ “gleichverteilt” in $[0,1]^2$ ist. Gehen wir von dieser Annahme aus, so erhalten wir

$$\mathbb{P}[S \in A] = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 7.2.3. Zwei Freunde wollen sich an einem bestimmten Ort treffen. Jeder der beiden Freunde kommt zu einem zufälligen Zeitpunkt zwischen 10:00 und 11:00 Uhr an und wartet 20 Minuten lang auf die Ankunft des anderen Freundes. Wenn der andere Freund innerhalb dieser 20 Minuten nicht erscheint, findet das Treffen nicht statt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \text{“Freunde treffen sich”}.$$

Lösung. Die Ankunftszeit des ersten Freundes bezeichnen wir mit $10 + x$ (in Stunden), wobei $x \in [0,1]$. Analog sei die Ankunftszeit des zweiten Freundes $10+y$, mit $y \in [0,1]$. Als Wahrscheinlichkeitsraum können wir dann das Einheitsquadrat betrachten:

$$\Omega = [0,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,1]\}.$$

Die Freunde treffen sich genau dann, wenn der Abstand zwischen x und y nicht größer als $\frac{1}{3}$ ist, wobei $\frac{1}{3}$ Stunde $=$ 20 Minuten ist. Das Ereignis A ist also die Menge

$$A = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 : |x-y| \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

Wir werden nun davon ausgehen, dass der Punkt (x,y) “gleichverteilt” auf $[0,1]^2$ ist. Dann können wir die Wahrscheinlichkeit von A wie folgt ausrechnen:

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \lambda(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Dabei bezeichnet $\lambda(A)$ den Flächeninhalt von A.

7.3. Algebren

Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge.

Definition 7.3.1. Mit 2^Ω bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von Ω.

Definition 7.3.2. Eine Teilmenge von 2^Ω (d.h. eine Menge, deren Elemente Teilmengen von Ω sind) werden wir als eine *Mengenfamilie* bezeichnen.

Definition 7.3.3. Eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ heißt *Algebra* (oder *Boolsche Algebra*), wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.
(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$. (Komplementstabilität).
(3) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$. (Vereinigungsstabilität).

Beispiel 7.3.4. Folgende Mengenfamilien sind Algebren:

(1) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.
(2) $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

Beispiel 7.3.5. Sei $\Omega = \{1,2,3\}$. Folgende Mengenfamilie ist eine Algebra:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2,3\}\}.$$

Beispiel 7.3.6. Sei $\Omega = [0,1)$. Betrachte die Familie aller halbabgeschlossenen Teilintervalle von $[0,1)$:

$$\mathcal{F} = \{[a,b) : 0 \le a \le b \le 1\}.$$

Diese Mengenfamilie ist keine Algebra, denn $\mathcal{F}$ ist weder komplementstabil noch vereinigungsstabil.
Betrachte nun die Familie aller endlichen Vereinigungen von halbabgeschlossenen Teilintervallen von $[0,1)$:

$$\mathcal{G} = \left\{\cup_{k=1}^n [a_k, b_k) : n \in \mathbb{N}, 0 \le a_1 \le b_1 \le 1, \ldots, 0 \le a_n \le b_n \le 1\right\}.$$

Diese Mengenfamilie ist eine Algebra.

Beispiel 7.3.7. Sei $\Omega = [0,1)^d$. Ein (halbabgeschlossenes) Quader ist eine Menge der Form

$$Q = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d,$$

wobei $a_1 \le b_1, \ldots, a_d \le b_d$. Die folgende Familie ist keine Algebra:

$$\mathcal{F} = \{Q : Q \subset [0,1]^d \text{ und } Q \text{ ist Quader}\}.$$

Allerdings ist die folgende Familie aller endlichen Vereinigungen von Quadern eine Algebra:

$$\mathcal{G} = \{Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n : n \in \mathbb{N} \text{ und } Q_1, \ldots, Q_n \subset [0,1)^d \text{ sind Quader}\}.$$

Man kann diese Familie auch so beschreiben:

$$\mathcal{G} = \{Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n : n \in \mathbb{N}, \text{ und } Q_1, \ldots, Q_n \subset [0,1)^d \text{ sind disjunkte Quader}\}.$$

Bemerkung 7.3.8. Nimmt man eine endliche Anzahl von Elementen einer Algebra und wendet man auf diese Elemente beliebige mengentheoretische Operationen (wie z. B. $\cup, \cap, \Delta, \setminus, {}^c$) in irgendeiner Reihenfolge an, so erhält man wieder ein Element aus der Algebra. Einige Spezialfälle dieser Aussage werden im folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.3.9. *Sei $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ eine Algebra. Dann gilt:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
(2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.
(3) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$ *und* $A \triangle B \in \mathcal{F}$.
(4) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$.
(5) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$.

Beweis.

(1) $\mathcal{F}$ ist komplementstabil und $\Omega \in \mathcal{F}$ nach Definition. Es folgt, dass $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$.
(2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$. Im letzten Schritt haben wir die Regel von de Morgan benutzt.
(3) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$. Analog gilt auch $B \backslash A \in \mathcal{F}$. Es folgt, dass $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{F}$.
(4) Induktion.
(5) Induktion.

$\square$

7.4. σ-Algebren

DEFINITION 7.4.1. Eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ heißt *σ-Algebra*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.
(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$. (Komplementstabilität).
(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$. ($\sigma$-Vereinigungsstabilität).

BEISPIEL 7.4.2. Folgende Mengenfamilien sind σ-Algebren:

(1) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.
(2) $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

SATZ 7.4.3. *Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, so ist $\mathcal{F}$ auch eine Algebra.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Da $\mathcal{F}$ nach Definition komplementstabil ist und $\Omega \in \mathcal{F}$, bleibt es nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ vereinigungsstabil ist. Seien dazu $A, B \in \mathcal{F}$. Wir zeigen, dass $A \cup B \in \mathcal{F}$. Zunächst gilt $\Omega \in \mathcal{F}$. Wegen Komplementstabilität von σ-Algebren gilt auch $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$. Aus Eigenschaft (3) der σ-Algebren folgt nun, dass

$$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \in \mathcal{F}.$$

Dies beweist die Vereinigungsstabilität von $\mathcal{F}$. □

BEISPIEL 7.4.4. Die Umkehrung von Satz 7.4.3 gilt nicht. Sei $\Omega = \mathbb{N}$. Die Mengenfamilie

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$$

ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra.

BEISPIEL 7.4.5. Die Mengenfamilie $\mathcal{G}$ aus Beispiel 7.3.7 ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra.

BEISPIEL 7.4.6. Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Die folgende Mengenfamilie ist eine σ-Algebra (und somit auch eine Algebra):

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}.$$

SATZ 7.4.7. *Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Für beliebige $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ gilt auch $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \in \mathcal{F}$. In Worten: Eine σ-Algebra ist σ-schnittstabil.*

BEWEIS. Folgt aus der Regel von de Morgan: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = (A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots)^c \in \mathcal{F}$. □

Der nächste Satz zeigt, wie man eine σ-Algebra auf eine Teilmenge einschränken kann.

SATZ 7.4.8. *Sei $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ eine σ-Algebra. Sei $A \subset \Omega$ nichtleer. Definiere die folgende Mengenfamilie:*

$$\mathcal{F}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{F}\} \subset 2^A.$$

Dann ist $\mathcal{F}_A$ eine σ-Algebra.

BEWEIS. Wir beweisen nur die σ-Vereinigungsstabilität der Mengenfamilie $\mathcal{F}_A$. (Andere Eigenschaften sind Übung). Seien dazu $C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{F}_A$. Aus der Definition von $\mathcal{F}_A$ folgt: es existieren $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ mit $C_n = A \cap B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir haben die Darstellung

$$\cup_{n=1}^\infty C_n = \cup_{n=1}^\infty (A \cap B_n) = A \cap (\cup_{n=1}^\infty B_n).$$

Da $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, erhalten wir, dass $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$. Es folgt aus der Definition von $\mathcal{F}_A$, dass $A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathcal{F}_A$. Somit gilt $\cup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}_A$. $\square$

7.5. Limes superior und Limes inferior für Folgen von Mengen

Es wird in diesem Abschnitt gezeigt, dass σ-Algebren bezüglich der Limesbildung von Folgen von Mengen abgeschlossen sind.

Definition 7.5.1. Seien $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$. Dann ist $\limsup_{n\to\infty} A_n$ eine Teilmenge von Ω, die wie folgt definiert wird:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{i=k}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \text{für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } i \geq k \text{ mit } \omega \in A_i\}.$$

In Worten kann man das Ereignis $\limsup A_n$ wie folgt beschreiben:

$$\limsup A_n = \text{“Das Ereignis } A_i \text{ tritt für unendliche viele } i \in \mathbb{N} \text{ ein”}.$$

Definition 7.5.2. Seien $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$. Dann ist $\liminf_{n\to\infty} A_n$ eine Teilmenge von Ω, die wie folgt definiert wird:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{i=k}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ so dass } \omega \in A_i \text{ für alle } i \geq k\}.$$

In Worten läst sich $\liminf_{n\to\infty} A_n$ wie folgt beschreiben:

$$\limsup A_n = \text{“Das Ereignis } A_i \text{ tritt für alle bis auf endlich viele Werte von } i \in \mathbb{N} \text{ ein”}.$$

Beispiel 7.5.3. Eine Münze werde unendlich oft geworfen. Die Grundmenge ist

$$\Omega = \{K, Z\}^{\infty} = \{(a_1, a_2, \ldots) : a_n \in \{K, Z\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definiere Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ wie folgt:

$$A_n = \text{“Münze zeigt Kopf bei Wurf Nummer } n\text{”} = \{(a_1, a_2, \ldots) \in \{K, Z\}^{\infty} : a_n = K\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \text{“Münze zeigt unendlich oft Kopf”}, \\
\liminf_{n\to\infty} A_n &= \text{“Ab irgendwann zeigt Münze nur noch Kopf”} \\
&= \text{“Münze zeigt nur endlich oft Zahl”}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 7.5.4. Es gilt:

(1) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
(2) $(\liminf A_n)^c = \limsup(A_n^c)$ und $(\limsup A_n)^c = \liminf(A_n^c)$.

Bemerkung 7.5.5. Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ und ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, so gilt auch $\limsup A_n \in \mathcal{F}$ und $\liminf A_n \in \mathcal{F}$.

Bemerkung 7.5.6. Die Indikatorfunktion von $\limsup A_n$ ist $\limsup$ von Indikatorfunktionen:

$$\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}.$$

Analog für $\liminf$:

$$\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}.$$

7.6. Borel-σ-Algebra

Der nächste Satz besagt, dass der Schnitt von σ-Algebren wieder eine σ-Algebra ist.

SATZ 7.6.1. *Sei I eine beliebige nichtleere Menge. Für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{F}_i \subset 2^\Omega$ eine σ-Algebra. Dann ist auch die Mengenfamilie*

$$\mathcal{F} = \cap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{F}_i \text{ für alle } i \in I\}$$

eine σ-Algebra.

BEWEIS. Wir zeigen nur, dass $\mathcal{F}$ σ-vereinigungsstabil ist. Andere Bedingungen werden analog gezeigt. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Dann gilt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_i$ für jedes $i \in I$. Da $\mathcal{F}_i$ eine σ-Algebra ist, erhalten wir, dass $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}_i$ für jedes $i \in I$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ heißt es aber, dass $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$. $\square$

DEFINITION 7.6.2. Sei $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ eine beliebige nichtleere Mengenfamilie. Die Mengenfamilie

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F}: \mathcal{E} \subset \mathcal{F} \subset 2^\Omega \\ \mathcal{F} \text{ ist } \sigma-Algebra}} \mathcal{F}$$

heißt die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra*. Der Schnitt wird über alle σ-Algebren $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$, die $\mathcal{E}$ enthalten, genommen.

BEMERKUNG 7.6.3. Aus Satz 7.6.1 folgt, dass $\sigma(\mathcal{E})$ tatsächlich eine σ-Algebra ist.

BEMERKUNG 7.6.4. Eine äquivalente Beschreibung: $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen aus $\mathcal{E}$ enthält. Dabei heißt "die kleinste" folgendes: ist $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ irgendeine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.

DEFINITION 7.6.5. Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{E}$ die Familie aller Intervalle der Form $(-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{E}) \subset 2^\mathbb{R}$ heißt die *Borel-σ-Algebra* auf $\mathbb{R}$. Elemente von $\mathcal{B}$ heißen *Borel-Mengen*.

BEMERKUNG 7.6.6. Man kann zeigen, dass die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ von jeder der folgenden Mengenfamilien erzeugt wird:

(1) Halbabgeschlossene Intervalle $(a, b]$.
(2) Halbabgeschlossene Intervalle $[a, b)$.
(3) Offene Intervalle (a, b).
(4) Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$.
(5) Offene Teilmengen von $\mathbb{R}$.
(6) Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Die obige Definition kann man auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

DEFINITION 7.6.7. Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{E}$ die Familie aller "Oktanten" der Form

$$(-\infty, a_1] \times \ldots \times (-\infty, a_d]$$

mit $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$. Die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{E}) \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ heißt die *Borel-σ-Algebra* auf $\mathbb{R}^d$. Elemente von $\mathcal{B}^d$ heißen *Borel-Mengen*.

Bemerkung 7.6.8. Man kann zeigen, dass die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^d$ von jeder der folgenden Mengenfamilien erzeugt wird:

(1) Halbabgeschlossene Quader $(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d]$.
(2) Halbabgeschlossene Quader $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_d, b_d)$.
(3) Offene Quader $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d)$.
(4) Abgeschlossene Quader $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$.
(5) Offene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$.
(6) Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$.

Bemerkung 7.6.9. Somit ist jede offene Teilmenge und jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ eine Borel-Menge. Man kann sich dann fragen, ob es überhaupt nicht-Borel Mengen gibt. Man kann zeigen, dass

(1) Die Familie der Borel-Mengen $\mathcal{B}^d$ ist gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.
(2) Die Familie $2^{\mathbb{R}^d}$ aller Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ hat eine strikt größere Mächtigkeit, als $\mathbb{R}$.

Somit gibt es Teilmengen von $\mathbb{R}^d$, die keine Borel-Mengen sind. Es ist allerdings nicht einfach, solche Mengen zu konstruieren. Im Weiteren werden wir es nur mit Borel-Mengen zu tun haben.

7.7. Maße

Definition 7.7.1. Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ eine σ-Algebra. Dann heißt das Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ ein *Messraum*. Mengen (oder Ereignisse) $A \subset \Omega$ mit $A \in \mathcal{F}$ heißen *messbar*.

Definition 7.7.2. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Ein *Maß* μ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ mit der folgenden Eigenschaft, die *σ-Additivität* genannt wird: Für alle paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt ein *Maßraum*.

Beispiel 7.7.3. Sei $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega$ eine beliebige Folge und $m_1, m_2, \ldots \geq 0$ beliebige Zahlen. Man kann dann das folgende Maß definieren:

$$\mu(A) = \sum_{i \in \mathbb{N} : \omega_i \in A} m_i, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Man kann sich vorstellen, dass μ eine Verteilung der positiven elektrischen Ladung auf Ω beschreibt, bei der sich die Ladung nur in den Punkten $\omega_1, \omega_2, \ldots$ sammelt, wobei die Ladung des Punktes ω_i gleich m_i ist.

Wir geben nun eine Definition des Volumens einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$.

Definition 7.7.4. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ beliebig. Definiere $\lambda(A)$, das *Lebesgue-Maß* von A, wie folgt:

(1) Ist $B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ ein Quader, so sei

$$\lambda(B) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d).$$

(2) Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ beliebig, so sei

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) : B_1, B_2, \ldots \text{ sind Quader mit } A \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_i \right\}.$$

Allerdings ist die so konstruierte Funktion λ kein Maß auf $(\mathbb{R}^d, 2^{\mathbb{R}^d})$: sie ist nicht σ-additiv und sogar nicht additiv.

Satz 7.7.5 (Vitali). *Es existieren zwei Mengen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^d$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so dass*

$$\lambda(A_1 \cup A_2) \neq \lambda(A_1) + \lambda(A_2).$$

Wenn wir aber die Mengenfunktion λ nur auf die σ-Algebra der Borel-Mengen einschränken, wird sie σ-additiv.

Satz 7.7.6 (Satz von Lebesgue). *λ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$.*

7.8. Wahrscheinlichkeitsmaße

Die axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Grundlage der Maßtheorie wurde von A. N. Kolmogorov im Jahr 1929 gegeben.

Definition 7.8.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist eine Funktion $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

(1) Normiertheit: $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.
(2) σ-Additivität: Für alle paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{P}[\cup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i].$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt ein *Wahrscheinlichkeitsraum.*

Beispiel 7.8.2 (diskrete Wahrscheinlichkeitsräume). Sei Ω eine endliche oder abzählbare Menge. Sei $p : \Omega \to [0,1]$ eine Funktion mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Definiere $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$:

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \in 2^{\Omega}.$$

Dann ist $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, 2^{\Omega})$. Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P})$, die auf diese Weise mit einem endlichen oder abzählbaren Ω konstruiert wurden, heißen *diskrete Wahrscheinlichkeitsräume.*

Beispiel 7.8.3 (geometrische Wahrscheinlichkeiten, siehe Kapitel 7.2). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Borel-Menge mit $\lambda(\Omega) \neq 0$ und $\lambda(\Omega) \neq \infty$. Stellen wir uns vor, dass ein zufälliger, "gleichverteilter" Punkt S in der Menge Ω ausgewählt wird. Als Grundmenge dieses Experiments können wir dann Ω betrachten. Als σ-Algebra auf Ω wählen wir die Einschränkung

$$\mathcal{B}^d_{\Omega} = \{B \cap \Omega : B \in \mathcal{B}^d\}$$

der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^d$ auf Ω; siehe Satz 7.4.8. Dann definieren wir folgendes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B}^d_{\Omega})$:

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}, \qquad A \in \mathcal{B}^d_{\Omega}.$$

Bemerkung 7.8.4 (idealer Zufallsgenerator). Im obigen Beispiel sei $\Omega = [0,1]$. Für jeden einzelnen Punkt $\omega \in [0,1]$ gilt $\lambda(\{\omega\}) = 0$ und somit

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = 0.$$

Sei nun $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \subset [0,1]$ abzählbar, z. B. $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, wobei $\mathbb{Q}$ die Mengen der rationalen Zahlen ist. Aus der σ-Additivität folgt dann, dass

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[\{\omega_i\}] = 0.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein idealer Zufallsgenerator eine rationale Zahl erzeugt, gleich 0.

Alle Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit, die wir in Kapitel 1 bewiesen haben, wie z. B. die Monotonie, die Additivität, die Siebformel, gelten nach wie vor. Man muss nur annehmen, dass alle betrachteten Ereignisse messbar sind. Wir beweisen nun einige weitere Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit.

Satz 7.8.5 (σ-Subadditivität). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ beliebig und nicht nötigerweise disjunkt. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i].$$

Beweis. Definiere:

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus B_1, \quad B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \quad \ldots, \quad B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \quad \ldots.$$

Da $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, sind die Mengen $B_1, B_2, \ldots$ messbar. Die Mengen $B_1, B_2, \ldots$ sind disjunkt und es gilt $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Aus der σ-Additivität von $\mathbb{P}$ folgt, dass

$$\mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[B_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i].$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $A_i \subset B_i$ und somit $\mathbb{P}[A_i] \leq \mathbb{P}[B_i]$. $\square$

Definition 7.8.6. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Ereignis $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] = 0$ heißt ein *Nullereignis*. Ein Ereignis $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] = 1$ heißt ein *fast sicheres* Ereignis.

Satz 7.8.7. *Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullereignissen ist wieder ein Nullereignis. Der Schnitt von abzählbar vielen fast sicheren Ereignissen ist wieder ein fast sicheres Ereignis.*

Beweis. Übung. Die erste Aussage folgt aus der σ-Subadditivität. Die zweite Aussage: Regel von de Morgan. $\square$

Satz 7.8.8 (Stetigkeit von $\mathbb{P}$). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ messbare Mengen. Dann gelten folgende zwei Aussagen.*

(1) *Aus $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ folgt $\mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n]$.*

(2) *Aus* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *folgt* $\mathbb{P}\left[\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$.

Beweis von Teil 1. Es gelte $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Sei $A_0 = \emptyset$. Definiere:

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \ldots.$$

Es gilt: die Mengen $B_1, B_2, \ldots$ sind messbar, disjunkt und $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Aus der Additivität von $\mathbb{P}$ folgt, dass

$$\mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[B_i] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[B_i].$$

Da nun $\mathbb{P}[B_i] = \mathbb{P}[A_i] - \mathbb{P}[A_{i-1}]$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[B_i] = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1] + \ldots + \mathbb{P}[A_n] - \mathbb{P}[A_{n-1}]) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n].$$

Beweis von Teil 2. Es gelte $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. Mit den Regeln von de Morgan erhalten wir

$$\mathbb{P}\left[\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} (A_i^c)\right].$$

Allerdings gilt $A_1^c \subset A_2^c \subset \ldots$ und somit können wir die bereits bewiesene Aussage von Teil 1 auf die Folge $A_1^c, A_2^c, \ldots$ anwenden:

$$1 - \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{\infty} (A_i^c)\right] = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n^c] = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - \mathbb{P}[A_n]) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n].$$

□

7.9. Das Lemma von Borel–Cantelli

Lemma 7.9.1 (Borel–Cantelli). *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *Ereignisse.*

(1) *Angenommen, dass* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] < \infty$. *Dann gilt* $\mathbb{P}[\limsup A_n] = 0$. *Mit anderen Worten:*

$$\mathbb{P}[\text{„Es treten unendlich viele } A_n \text{ ein"}] = 0.$$

(2) *Angenommen, dass* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] = \infty$ *und dass zusätzlich die Ereignisse* $A_1, A_2, \ldots$ *unabhängig sind. Dann gilt* $\mathbb{P}[\limsup A_n] = 1$. *Mit anderen Worten:*

$$\mathbb{P}[\text{„Es treten unendlich viele } A_n \text{ ein"}] = 1.$$

Beispiel 7.9.2. Wir betrachten ein unendlich oft wiederholtes Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$. Betrachte die Ereignisse

$$A_n = \text{„Erfolg bei Experiment } n\text{"}.$$

Bestimme $\mathbb{P}[\limsup A_n]$ und $\mathbb{P}[\liminf A_n]$.

Lösung. Es ist $\mathbb{P}[A_i] = p > 0$. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} p = \infty.$$

Da die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ unabhängig sind, können wir den zweiten Teil des Borel–Cantelli–Lemmas anwenden:

$$\mathbb{P}[\limsup A_n] = 1.$$

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass man in einem unendlich oft wiederholten Bernoulli-Experiment unendlich viele Erfolge erzielt, ist 1. Dies ist im Einklang mit der Intuition: werfen wir eine Münze unendlich oft, so werden wir mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft "Kopf" sehen. Analog zeigt man, dass

$$\mathbb{P}[\limsup(A_n^c)] = 1.$$

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass man in einem unendlich oft wiederholten Bernoulli-Experiment unendlich viele Misserfolge erzielt, ist 1.
Für die Wahrscheinlichkeit von $\liminf A_n$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\liminf A_n] &= \mathbb{P}[\text{“Ab irgendwann nur noch Erfolge”}]\\
&= \mathbb{P}[\text{“Nur endlich viele Misserfolge”}]\\
&= 1 - \mathbb{P}[\text{“Unendlich viele Misserfolge”}]\\
&= 1 - \mathbb{P}[\limsup(A_n^c)]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dies steht im Einklang mit der Intuition: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze beim unendlichen Münzwurf ab irgendwann nur noch "Kopf" zeigt, ist 0. Analog gilt

$$\mathbb{P}[\liminf(A_n^c)] = \mathbb{P}[\text{“Ab irgendwann nur noch Misserfolge”}] = 0.$$

Beispiel 7.9.3. Es seien $A_1, A_2, \ldots$ unabhängige Ereignisse mit

$$\mathbb{P}[A_n] = \frac{1}{n^\alpha},$$

wobei $\alpha > 0$ ein Parameter ist. Bestimme $\mathbb{P}[\limsup A_n]$.

Lösung. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ ist } \begin{cases} \text{unendlich}, & \text{falls } \alpha \le 1,\\ \text{endlich}, & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases}$$

Mit dem Lemma von Borel–Cantelli (Teil 2 im Fall $\alpha \le 1$ und Teil 1 im Fall $\alpha > 1$) erhalten wir

$$\mathbb{P}[\limsup A_n] = \mathbb{P}[\text{“Unendlich viele } A_n \text{ treten ein”}] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha \le 1,\\ 0, & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases}$$

Beweis des Lemmas von Borel–Cantelli, Teil 1. Definiere $B_k = \cup_{n \ge k} A_n$. Dann sind $B_1, B_2, \ldots$ messbar und es gilt $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$. Mit der Definition von lim sup und mit dem Stetigkeitssatz 7.8.8 erhalten wir

$$\mathbb{P}[\limsup A_n] = \mathbb{P}\left[\cap_{k=1}^{\infty} B_k\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[B_k].$$

Nun benutzen wir die σ-Subadditivität (Satz 7.8.5):

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[B_k] \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n \ge k} \mathbb{P}[A_n] = 0.$$

Der letzte Schritt folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n]$. $\square$

Beweis des Lemmas von Borel–Cantelli, Teil 2.
Seien nun $A_1, A_2, \dots$ unabhängig mit $p_n = \mathbb{P}[A_n]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$. Für $k, m \in \mathbb{N}$ definiere das Ereignis

$$B_{k,m} = \cup_{n=k}^{k+m} A_n.$$

Diese Ereignisse sind messbar. Sein nun $k \in \mathbb{N}$ fest. Es gilt

$$B_{k,1} \subset B_{k,2} \subset \dots \text{ und } \cup_{m=1}^{\infty} B_{k,m} = \cup_{n=k}^{\infty} A_n \stackrel{def}{=} B_k.$$

Aus dem Stetigkeitssatz (Satz 7.8.8) folgt nun, dass

$$\mathbb{P}[B_k] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}[B_{k,m}] = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \mathbb{P}\left[\left(\cup_{n=k}^{k+m} A_n\right)^c\right]\right) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \mathbb{P}\left[\cap_{n=k}^{k+m} (A_n^c)\right]\right).$$

Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ sind unabhängig nach Voraussetzung. Also sind auch Ereignisse $A_1^c, A_2^c, \dots$ unabhängig. Es folgt, dass

$$\mathbb{P}[B_k] = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \prod_{n=k}^{k+m} \mathbb{P}[A_n^c]\right) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \prod_{n=k}^{k+m} (1 - p_n)\right).$$

Nun wenden wir auf die rechte Seite die Ungleichung $1 - p \le e^{-p}$ an:

$$\mathbb{P}[B_k] \ge \liminf_{m\to\infty} \left(1 - \prod_{n=k}^{k+m} e^{-p_n}\right) = \liminf_{m\to\infty} (1 - e^{-(p_k + p_{k+1} + \dots + p_{k+m})}) = 1,$$

wobei der letzte Schritt aus der Divergenz der Reihe $p_k + p_{k+1} + \dots$ folgt. Wir haben gezeigt, dass $\mathbb{P}[B_k] = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da der Schnitt von abzählbar vielen fast sicheren Eregnissen ebenfalls falls sicher ist (Satz 7.8.7), erhalten wir

$$\mathbb{P}\left[\cap_{k=1}^{\infty} B_k\right] = 1.$$

Die Ereignisse $\limsup A_n$ und $\cap_{k=1}^{\infty} B_k$ sind aber nach der Definition von lim sup gleich. $\square$