KAPITEL 8

Zufallsvariablen: Die allgemeine Definition

8.1. Zufallsvariablen

Bis zu diesem Zeitpunkt haben wir ausschließlich Zufallsvariablen mit endlich oder abzählbar vielen Werten (also diskrete Zufallsvariablen) betrachtet. Jetzt werden wir allgemeine Zufallsvariablen einführen.

Definition 8.1.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *messbar*, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{X \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

Hierbei ist $\{X \leq a\}$ die Menge aller Punkte im Wahrscheinlichkeitsraum, wo die Funktion X einen Wert $\leq a$ annimmt:

$$\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \subset \Omega.$$

Eine messbare Funktion nennen wir auch eine *Zufallsvariable*.

Für eine Zufallsvariable X ist also die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X \leq a]$ wohldefiniert. Der nächste Satz besagt, dass auch die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X \in B]$ wohldefiniert ist, wobei $B \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Borel-Menge ist.

Satz 8.1.2. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann gilt für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}$:*

$$\{X \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Hierbei ist

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

Bemerkung 8.1.3. Aus diesem Satz folgt, dass für eine Zufallsvariable X gilt:

(1) Das Ereignis $\{X = a\}$ ist messbar, für alle $a \in \mathbb{R}$.
(2) Das Ereignis $\{X \in A\}$ ist messbar, für jede höchstens abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}$.
(3) Somit ist auch das Ereignis $\{X \notin A\} = \{X \in A\}^c$ ebenfalls messbar, für jede höchstens abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}$.
(4) Insbesondere ist das Ereignis $\{X \in \mathbb{Q}\}$ messbar.
(5) Ereignisse $\{a < X < b\}$, $\{a \leq X \leq b\}$, $\{a < X \leq b\}$, $\{a \leq X < b\}$ sind messbar.

Für den Beweis von Satz 8.1.2 benötigen wir eine Hilfsaussage.

Proposition 8.1.4. *Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und E eine Menge. Außerdem seien $X : \Omega \to E$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subset 2^E$ eine Mengenfamilie mit der Eigenschaft, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für jede Menge $B \in \mathcal{E}$. Dann gilt auch $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für jede Menge $B \in \sigma(\mathcal{E})$.*

Bemerkung 8.1.5. Mit anderen Worten: Um zu zeigen, dass die Urbilder aller Mengen aus einer σ-Algebra messbar sind, reicht es zu zeigen, dass die Urbilder aller Mengen aus einem Erzeuger dieser σ-Algebra messbar sind.

Beweis von Proposition 8.1.4. Wir wollen zeigen, dass das Urbild jeder Menge aus $\sigma(\mathcal{E})$ ein Element von $\mathcal{F}$ ist. Deshalb betrachten wir die Familie

$$\mathcal{A} = \{B \subset E : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \subset 2^E.$$

Wir werden im Weiteren zeigen, dass die Familie $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Außerdem gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ laut Voraussetzung. Die Familie $\mathcal{A}$ ist also eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist (laut Definition der erzeugten σ-Algebra) die *kleinste* σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Somit muss $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ gelten. Für jede Menge $B \in \sigma(\mathcal{E})$ gilt dann $B \in \mathcal{A}$. Laut Definition von $\mathcal{A}$ bedeutet das, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für jede Menge $B \in \sigma(\mathcal{E})$. Das beweist die Behauptung der Proposition.

Wir werden nun zeigen, dass für die Familie $\mathcal{A}$ alle drei Bedingingen aus der Definition einer σ-Algebra gelten.

Bedingung 1. Es gilt $E \in \mathcal{A}$, denn $X^{-1}(E) = \Omega$ und $\Omega \in \mathcal{F}$.

Bedingung 2. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ komplementstabil ist. Sei also $A \in \mathcal{A}$. Wir zeigen, dass $A^c \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$X^{-1}(A^c) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A^c\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \notin A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}^c = (X^{-1}(A))^c.$$

Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt, dass $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Außerdem ist die Familie $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und somit komplementstabil. Es folgt, dass $X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c \in \mathcal{F}$. Das bedeutet aber, dass $A^c \in \mathcal{A}$.

Bedingung 3. Schließlich zeigen wir, dass die Familie $\mathcal{A}$ σ-vereinigungsstabil ist. Seien also $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Wir zeigen, dass $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$X^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_n\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n).$$

Aus $A_n \in \mathcal{A}$ folgt, dass $X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist die Familie $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und somit σ-vereinigungsstabil. Es folgt, dass $X^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$. Das bedeutet, dass $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Somit haben wir gezeigt, dass die Mengenfamilie $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. □

Beweis von Satz 8.1.2. Betrachte die Mengenfamilie

$$\mathcal{E} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \subset 2^{\mathbb{R}}.$$

Da $X : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar ist, gilt $X^{-1}(B) = \{X \leq a\} \in \mathcal{F}$ für jedes $B = (-\infty, a] \in \mathcal{E}$. Proposition 8.1.4 besagt, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für alle $B \in \sigma(\mathcal{E})$. Dabei ist aber $\sigma(\mathcal{E})$ nichts anderes als die Borel-σ-Algebra. □

Beispiel 8.1.6. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{F}$ ein messbares Ereignis. Wir zeigen, dass die Indikatorfunktion von A

$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$$

eine Zufallsvariable ist.

Lösung. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten das Ereignis

$$\{X \le a\} = \begin{cases} \Omega, & a \ge 1, \\ \emptyset, & a < 0, \\ A^c, & a \in [0, 1). \end{cases}$$

Es gilt $\Omega, \emptyset, A^c \in \mathcal{F}$, denn $A \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra. Somit ist X messbar.

8.2. Zufallsvektoren

Definition 8.2.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $X_1, \ldots, X_d : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $d \in \mathbb{N}$. Betrachte nun die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d.$$

Die Funktion X heißt ein d-dimensionaler *Zufallsvektor* (oder *messbar*), wenn $X_1, \ldots, X_d$ messbar sind.

Satz 8.2.2. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(1) *X ist ein Zufallsvektor.*
(2) *Für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$.*

Beweis von (1) ⇒ (2). Seien $X_1, \ldots, X_d$ messbar. Sei $A = (-\infty, a_1] \times \ldots \times (-\infty, a_d]$ ein "Oktant". Dann gilt:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \le a_1, \ldots, X_d(\omega) \le a_d\} = \cap_{k=1}^d \{X_k \le a_k\}.$$

Wegen der Messbarkeit von X_k gilt $\{X_k \le a_k\} \in \mathcal{F}$ für alle $k = 1, \ldots, d$. Da $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, folgt, dass $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Wir haben gezeigt, dass das Urbild jedes Oktanten messbar ist. Die Familie der Oktanten erzeugt die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^d$. Mit Proposition 8.1.4 folgt daraus, dass das Urbild jeder Borel-Menge messbar ist. □

Beweis von (2) ⇒ (1). Wir nehmen an, dass für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ gilt, dass $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$. Sei $k \in \{1, \ldots, d\}$ fest. Sei $B = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k \le a\}$. Diese Menge ist Borel, da abgeschlossen. Es folgt, dass $X^{-1}(B) = \{X_k \le a\} \in \mathcal{F}$. Somit ist die Funktion X_k messbar. Das gilt für jedes $k \in \{1, \ldots, d\}$. Somit ist X messbar. □

Die Familie der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$ wird mit $\mathcal{B}^d$ bezeichnet.

Definition 8.2.3. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ heißt *Borel-messbar* (oder *Borel-Funktion*), wenn gilt:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{B}^{d_1} \text{ für alle } A \in \mathcal{B}^{d_2}.$$

Bemerkung 8.2.4. Eine Funktion ist also Borel-messbar, wenn das Urbild jeder Borel-Menge wieder eine Borel-Menge ist. Zum Vergleich: Eine Funktion ist stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Proposition 8.2.5. *Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ ist Borel-messbar.*

Beweis. Die Funktion f sei stetig. Es folgt, dass für jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^{d_2}$ das Urbild $f^{-1}(A)$ offen ist. Das Urbild jeder offenen Menge ist also eine Borel-Menge. Die Familie der offenen Mengen erzeugt die Borel-σ-Algebra. Mit Proposition 8.1.4 folgt, dass auch das Urbild jeder Borel-Menge eine Borel-Menge ist. Somit ist f Borel-messbar. □

Satz 8.2.6. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{d_1}$ ein Zufallsvektor und $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ eine Borel-Funktion. Dann ist auch die Verknüpfung*

$$f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^{d_2}$$

ein Zufallsvektor.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{B}^{d_2}$. Dann gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}^{d_1}$, denn f ist eine Borel-Funktion. Es gilt

$$(f \circ X)^{-1}(A) = X^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \in \mathcal{F},$$

da X messbar ist. Nach Satz 8.2.2 ist $f \circ X$ ein Zufallsvektor. □

Korollar 8.2.7. *Sind X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so sind auch $X + Y$, $X \cdot Y$ und $a \cdot X$, wobei $a \in \mathbb{R}$, Zufallsvariablen.*

Beweis. Die Funktionen $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto ax$ sind Borel-Funktionen, da sie stetig sind. Die Behauptung folgt aus Satz 8.2.6. □

8.3. Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable

Die Familie der Borel-Teilmengen von $\mathbb{R}$ wird mit $\mathcal{B}$ bezeichnet.

Definition 8.3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

(1) Die *Verteilung* von X ist die Funktion

$$P_X : \mathcal{B} \to [0, 1] \text{ mit } P_X(A) = \mathbb{P}[X \in A], \quad A \in \mathcal{B}.$$

P_X ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

(2) Die *Verteilungsfunktion* von X ist die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \text{ mit } F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 8.3.2. Im Einheitskreis werde ein Punkt (X, Y) zufällig und gleichverteilt gewählt. Es sei R der Abstand von (X, Y) zum Mittelpunkt des Kreises. Bestimme die Verteilungsfunktion von R.

Lösung. Als Grundmenge wählen wir den Einheitskreis $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Sei $\mathcal{F} = \mathcal{B}^2_\Omega$ die σ-Algebra der Borel-Teilmengen von Ω. Als Wahrscheinlichkeitsmaß wählen wir

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\lambda(A)}{\pi}, \quad A \in \mathcal{F},$$

wobei λ das Lebesgue-Maß ist. Das entspricht der Annahme, dass der Punkt gleichverteilt ist. Der Abstand zum Ursprung ist dann die Zufallsvariable $R : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$R(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Beachte, dass R stetig und somit messbar ist. Um die Verteilungsfunktion von R zu bestimmen, schauen wir uns das Ereignis $\{R \le t\}$ an:

$$\{R \le t\} = \{(x,y) \in \Omega : \sqrt{x^2+y^2} \le t\} = \begin{cases} \Omega, & t \ge 1, \\ \emptyset, & t < 0, \\ \text{Kreis vom Radius } t, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$F_R(t) = \mathbb{P}[R \le t] = \begin{cases} 1, & t \ge 1, \\ 0, & t < 0, \\ \frac{\pi t^2}{\pi}, & t \in [0,1] \end{cases} = \begin{cases} 1, & t \ge 1, \\ 0, & t < 0, \\ t^2, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Dies ist die Verteilungsfunktion von R.

Beispiel 8.3.3. Ein Zufallsgenerator erzeugt zwei unabhängige und in $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen X, Y. Bestimme die Verteilungsfunktion von $Z := X + Y$.

Lösung. Als Grundmenge wählen wir $\Omega = [0,1]^2$. Sei $\mathcal{F} = \mathcal{B}^2_\Omega$ die Einschränkung der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^2$ auf Ω. Die Bedingung der Gleichverteilung und Unabhängigkeit von X und Y wird so interpretiert: die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \in \mathcal{F}$ ist

$$\mathbb{P}[A] = \lambda(A).$$

Wir können die Zufallsvariablen $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren:

$$X(x,y) = x, \quad Y(x,y) = y, \quad Z(x,y) = x + y, \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$

Das Ereignis, das uns hier interessiert, ist

$$\{Z \le t\} = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x + y \le t\}.$$

Es gilt

$$\{Z \le t\} = \begin{cases} \emptyset, & t < 0, \\ \text{gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge } t, & t \in [0,1], \\ \text{das Komplement eines solchen Dreiecks mit Kathetenlänge } 2-t, & t \in [1,2], \\ \Omega, & t \ge 2. \end{cases}$$

Somit erhalten wir

$$F_Z(t) = \mathbb{P}[Z \le t] = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t^2}{2}, & t \in [0,1], \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2}, & t \in [1,2], \\ 1, & t \ge 2. \end{cases}$$

Dies ist die Verteilungsfunktion von Z. Sie ist stetig.

Beispiel 8.3.4. Betrachte eine konstante Zufallsvariable, also $X = c$. Wie sieht dann die Verteilungsfunktion F_X aus?

Lösung. Es gilt

$$F_X(t) = \mathbb{P}[c \le t] = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \ge c. \end{cases}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Verteilungsfunktion Unstetigkeitsstellen haben kann.

Satz 8.3.5. *Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Dann hat F_X die folgenden drei Eigenschaften:*

(1) *Grenzwerte:* $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ *und* $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$.
(2) *Monotonie: Für alle $t_1 \le t_2$ gilt $F_X(t_1) \le F_X(t_2)$.*
(3) *Rechtsstetigkeit: Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt* $\lim_{t\downarrow t_0} F_X(t) = F_X(t_0)$.

Bemerkung 8.3.6. Der linksseitige Grenzwert $\lim_{t\uparrow t_0} F_X(t)$ existiert ebenfalls, da die Funktion F_X monoton ist. Allerdings muss der linksseitige Grenzwert nicht mit $F_X(t_0)$ übereinstimmen, siehe Beispiel 8.3.4 mit $t_0 = c$.

Beweis von (2). Seien $t_1 \le t_2$ beliebig. Betrachte die Ereignisse

$$\{X \le t_1\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t_1\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t_2\} = \{X \le t_2\}$$

Deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse $\mathbb{P}[X \le t_1] \le \mathbb{P}[X \le t_2]$, was gleichbedeutend ist mit $F_X(t_1) \le F_X(t_2)$. □

Beweis von (1). Wir betrachten den Fall $t \to -\infty$. Führe die Ereignisse $A_n = \{X \le -n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein. Dann gilt $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Aufgrund der Stetigkeit der Wahrscheinlichkeit folgt daraus, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_X(-n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0.$$

Dabei darf allerdings n nur natürliche Werte annehmen. Für ein beliebiges $t < 0$ kann man immer ein $n \in \mathbb{N}$ mit $-n \le t < -n+1$ finden. Wegen der Monotonie von F und des Sandwichprinzips gilt dann

$$0 = \lim_{n\to\infty} F_X(-n) \le \lim_{t\to-\infty} F_X(t) \le \lim_{n\to\infty} F_X(-n+1) = 0.$$

Somit ist $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$, wie behauptet. $\square$

Beweis von (3). Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir definieren die Ereignisse $A_n = \{X \le t_0 + 1/n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{X \le t_0\}$. Aufgrund der Stetigkeit der Wahrscheinlichkeit gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} F_X\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[X \le t_0] = F_X(t_0).$$

Das gilt wieder nur für $n \in \mathbb{N}$. Für ein beliebiges $t > t_0$ können wir $n \in \mathbb{N}$ mit $t_0 + \frac{1}{n} \le t < t_0 + \frac{1}{n-1}$ finden. Aufgrund der Monotonie von F_X und des Sandwichprinzips erhalten wir

$$F_X(t_0) = \lim_{n\to\infty} F_X\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) \le \lim_{t\downarrow t_0} F_X(t) \le \lim_{n\to\infty} F_X\left(t_0 + \frac{1}{n-1}\right) = F_X(t_0).$$

Somit ist $\lim_{t\downarrow t_0} F_X(t) = F_X(t_0)$, wie behauptet. $\square$

Der nächste Satz besagt, dass die Verteilung einer Zufallsvariable durch ihre Verteilungsfunktion eindeutig festgelegt wird.

Satz 8.3.7. *Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit*

$$F_{X_1}(t) = F_{X_2}(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für alle Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}[X_1 \in B] = \mathbb{P}[X_2 \in B].$$

Für den Beweis benötigen wir einen Satz aus der Maßtheorie.

Satz 8.3.8 (Eindeutigkeit der Maß-Fortsetzung). *Sei Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ eine schnittstabile Mengenfamilie. Die Schnittstabilität bedeutet: für $A, B \in \mathcal{E}$ gilt auch $A \cap B \in \mathcal{E}$. Es sei $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. Seien $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\mathbb{P}_1[A] = \mathbb{P}_2[A] \text{ für alle } A \in \mathcal{E}.$$

Dann gilt sogar

$$\mathbb{P}_1[A] = \mathbb{P}_2[A] \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Bemerkung 8.3.9. Mit anderen Worten: stimmen zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Erzeuger einer σ-Algebra überein, so stimmen sie auch auf der ganzen σ-Algebra überein, wenn der Erzeuger schnittstabil ist.

Beweis von Satz 8.3.7. Die Mengenfamilie $\mathcal{E} = \{(-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$ ist schnittstabil, denn

$$(-\infty, t] \cap (-\infty, s] = (-\infty, \min(t, s)] \in \mathcal{E}.$$

Für die Verteilungen von X_1 und X_2 gilt nun:

$$P_{X_1}((-\infty, t]) = \mathbb{P}[X_1 \le t] = F_{X_1}(t) = F_{X_2}(t) = \mathbb{P}[X_2 \le t] = P_{X_2}((-\infty, t]).$$

Die Wahrscheinlichkeitsmaße P_{X_1} und P_{X_2} stimmen also auf $\mathcal{E}$ überein. Nach der Eindeutigkeit der Maß-Fortsetzung stimmen sie auch auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ überein.

Somit gilt $P_{X_1}(B) = P_{X_2}(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Mit anderen Worten, $\mathbb{P}[X_1 \in B] = \mathbb{P}[X_2 \in B]$ für alle $B \in \mathcal{B}$. $\square$

Beispiel 8.3.10. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$. Bestimme $\mathbb{P}[X < t]$.

Lösung. Betrachte Ereignisse $A_n = \{X \leq t - \frac{1}{n}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{X < t\}$. Mit der Stetigkeit der Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\mathbb{P}[X < t] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[X \leq t - \frac{1}{n}\right] = \lim_{s\uparrow t} F_X(s).$$

Beachte: dieser Grenzwert muss im Allgemeinen nicht mit $F(t)$ übereinstimmen.

Beispiel 8.3.11. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$. Bestimme $\mathbb{P}[X = t]$.

Lösung. Es gilt

$$\mathbb{P}[X = t] = \mathbb{P}[X \leq t] - \mathbb{P}[X < t] = F_X(t) - \lim_{s\uparrow t} F_X(s).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $X = t$ ist, ist also gleich dem Sprung, den die Verteilungsfunktion F_X an der Stelle t macht. Die Funktion F_X ist stetig an der Stelle t genau dann wenn $\mathbb{P}[X = t] = 0$.

Definition 8.3.12. Sei X eine Zufallsvariable. Ein Wert $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}[X = t] > 0$ heißt ein *Atom* von X. Atome sind also Unstetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion F_X.

Proposition 8.3.13. *Jede Zufallsvariable hat höchstens abzählbar viele Atome. Mit anderen Worten, jede Verteilungsfunktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen (Sprünge).*

Beweis. Es gilt: F_X ist monoton, $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ und $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann es also höchstens n Sprünge geben, die eine Höhe von $\geq 1/n$ haben. Sonst wäre die Summe der Sprunghöhen > 1, was ein Widerspruch ist. Die Menge der Sprünge ist eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen und somit selbst abzählbar. $\square$

Beispiel 8.3.14. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$. Für $a < b$ bestimme $\mathbb{P}[a \leq X \leq b]$, $\mathbb{P}[a \leq X < b]$, $\mathbb{P}[a < X \leq b]$, $\mathbb{P}[a < X < b]$.

LÖSUNG. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[a \le X \le b] &= \mathbb{P}[X \le b] - \mathbb{P}[X < a] = F_X(b) - \lim_{s \uparrow a} F_X(s), \\
\mathbb{P}[a \le X < b] &= \mathbb{P}[X < b] - \mathbb{P}[X < a] = \lim_{s \uparrow b} F_X(s) - \lim_{s \uparrow a} F_X(s), \\
\mathbb{P}[a < X \le b] &= \mathbb{P}[X \le b] - \mathbb{P}[X \le a] = F_X(b) - F_X(a), \\
\mathbb{P}[a < X < b] &= \mathbb{P}[X < b] - \mathbb{P}[X \le a] = \lim_{s \uparrow b} F_X(s) - F_X(a).
\end{aligned}$$