KAPITEL 9

Varianz und Kovarianz

9.1. Varianz

DEFINITION 9.1.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wir benutzen die Notation

(1) $X \in L^1$, falls $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.
(2) $X \in L^2$, falls $\mathbb{E}[X^2] < \infty$.

LEMMA 9.1.2. *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *zwei Zufallsvariablen. Dann gilt:*

(1) $X, Y \in L^2 \Rightarrow X + Y \in L^2$.
(2) $X \in L^2, a \in \mathbb{R} \Rightarrow aX \in L^2$.
(3) $X \in L^2 \Rightarrow X \in L^1$.

BEWEIS VON (1). Seien $X, Y \in L^2$, also $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Aus der Ungleichung $(X+Y)^2 \leq 2X^2 + 2Y^2$ folgt, dass

$$\mathbb{E}[(X+Y)^2] \leq 2\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[Y^2] < \infty.$$

Somit gilt $X + Y \in L^2$. □

BEWEIS VON (2). Sei $X \in L^2$, also $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Es folgt, dass $\mathbb{E}[(aX)^2] = a^2\mathbb{E}[X^2] < \infty$, somit $aX \in L^2$. □

BEWEIS VON (3). Sei $X \in L^2$, also $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Es gilt die Ungleichung $|X| \leq \frac{X^2+1}{2}$, also

$$\mathbb{E}[|X|] \leq \mathbb{E}\left[\frac{X^2+1}{2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{2}\right] + \frac{1}{2} < \infty.$$

Somit ist $X \in L^1$. □

DEFINITION 9.1.3. Sei $X \in L^2$. Die *Varianz* von X ist:

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] < \infty.$$

Die *Standardabweichung* von X ist:

$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var} X}.$$

BEMERKUNG 9.1.4. Die Varianz beschreibt die erwartete quadratische Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert. Wird X in irgendwelchen physikalischen Einheiten, etwa in Metern, gemessen, so wird $\operatorname{Var} X$ in Quadratmetern gemessen. Deshalb führt man die Standardabweichung von X ein. Diese wird dann wieder in Metern gemessen, hat also die gleichen Einheiten wie X. Die Standardabweichung und die Varianz beschreiben, wie stark die Zufallsvariable um ihrem Erwartungswert streut. Für eine konstante Zufallsvariable $X = c$ gilt zum Beispiel, dass $\operatorname{Var} X = \sigma(X) = 0$, da es in diesem Fall gar keine Streuung gibt.

Satz 9.1.5. *Für jede Zufallsvariable $X \in L^2$ gilt die Formel:*

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Bemerkung 9.1.6. Es gilt $\operatorname{Var} X \geq 0$. Als Korollar erhalten wir, dass $(\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]$.

Beweis. Wir benutzen die Linearität des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} X &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mathbb{E}X \cdot X] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}X)^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\mathbb{E}X$ eine Konstante ist. □

Beispiel 9.1.7. Sei $X \sim U[0, 1]$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$. Wir berechnen $\operatorname{Var} X$.

Lösung. Die Dichte von X ist

$$f_X(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0, 1], \\ 0, & y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Wir berechnen $\mathbb{E}X$:

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} y f_X(y) dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen $\mathbb{E}[X^2]$ mit der Transformationsformel für den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_X(y) dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Somit erhalten wir

$$\operatorname{Var} X = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Für die Standardabweichung ergibt sich $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{12}}$.

Satz 9.1.8. *Sei $X \in L^2$ eine Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt:*

(1) $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var} X$.
(2) $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Beweis von (1). Wir benutzen die Linearität des Erwartungswerts:

$\operatorname{Var}(aX+b) = \mathbb{E}[(aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2] = \mathbb{E}[(aX+b-a\mathbb{E}X-b)^2] = \mathbb{E}[a^2(X-\mathbb{E}X)^2] = a^2 \operatorname{Var} X.$

□

Beweis von (2). $\sigma(aX+b) = \sqrt{\operatorname{Var}(aX+b)} = \sqrt{a^2 \operatorname{Var} X} = |a|\sigma(X)$. □

Beispiel 9.1.9. Sei $X \sim U[a,b]$ gleichverteilt auf einem Intervall $[a,b]$. Es gilt $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$. Wir berechnen $\operatorname{Var} X$.

Lösung. Wir haben die Darstellung $X = (b-a)Y + a$, wobei $Y \sim U[0,1]$.

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var}((b-a)Y + a) = (b-a)^2 \operatorname{Var} Y = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Für die Standardabweichung ergibt sich $\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$.

Bemerkung 9.1.10. Die Varianz einer Zufallsvariable ist immer ≥ 0. Für eine konstante Zufallsvariable $X = c$ gilt $\operatorname{Var} X = 0$. Können wir die Umkehrung dieser Aussage beweisen? Sei X eine Zufallsvariable mit $\operatorname{Var} X = 0$. Dann kann man behaupten, dass $\mathbb{P}[X = \mathbb{E}X] = 1$. Das heißt: die Zufallsvariable X ist *fast sicher* konstant. Wir werden das später mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung beweisen.

Satz 9.1.11. *Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt mit Parametern (μ, σ^2). Dann gilt $\mathbb{E}X = \mu$ und $\operatorname{Var} X = \sigma^2$.*

Beweis. Zuerst betrachten woir den Fall $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Die Dichte von X ist dann

$$f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} y f_X(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} y e^{-y^2/2} dy = 0,$$

da die Funktion $ye^{-y^2/2}$ ungerade ist. Für die Varianz erhalten wir

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_X(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2/2} dy.$$

Um dieses Integral zu berechnen, benutzen wir partielle Integration:

$$\operatorname{Var} X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} y(-e^{-y^2/2})' dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-ye^{-y^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) = 1.$$

Sei nun $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt mit beliebigen Parametern (μ, σ^2). Dann haben wir die Darstellung $X = \sigma Y + \mu$, wobei $Y \sim (0,1)$. Es gilt dann

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[\sigma Y + \mu] = \mu$$

und
$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var}(\sigma Y + \mu) = \sigma^2 \operatorname{Var} Y = \sigma^2.$$
Für die Standardabweichung ergibt sich übrigens $\sigma(X) = \sigma$ (wobei wir immer annehmen, dass $\sigma > 0$). $\square$

SATZ 9.1.12. *Sei $X \sim Poi(\lambda)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt $\mathbb{E}X = \operatorname{Var} X = \lambda$.*

BEWEIS. Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathbb{E}X = \lambda$. Wir berechnen $\operatorname{Var} X$. Betrachte zunächst
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \mathbb{P}[X = k] \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} \\ &= \lambda^2.\end{aligned}$$
Für $\mathbb{E}[X^2]$ gilt dann
$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda.$$
Für die Varianz erhalten wir
$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X^2])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$
$\square$

9.2. Kovarianz und Korrelationskoeffizient

DEFINITION 9.2.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen mit $X, Y \in L^2$. Dann ist die *Kovarianz* von X und Y wie folgt definiert:
$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)].$$

BEMERKUNG 9.2.2. $\operatorname{Cov}(X, X) = \operatorname{Var} X$.

BEMERKUNG 9.2.3. Wir zeigen, dass die Kovarianz wohldefiniert ist. Seien $X, Y \in L^2$. Nach Lemma 9.1.2 existieren $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$. Außerdem gilt dann
$$\tilde{X} := X - \mathbb{E}X \in L^2 \text{ und } \tilde{Y} := Y - \mathbb{E}Y \in L^2.$$
Wir zeigen, dass $\mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}]$ existiert. Es gilt
$$|\tilde{X}\tilde{Y}| \leq \frac{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2}{2}.$$
Daraus folgt, dass
$$\mathbb{E}[|\tilde{X}\tilde{Y}|] \leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[\tilde{X}^2] + \mathbb{E}[\tilde{Y}^2]\right) < \infty.$$

Somit ist die Zufallsvariable $\tilde{X}\tilde{Y} = (X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$ integrierbar und die Kovarianz existiert. $\square$

Satz 9.2.4. *Seien $X, Y \in L^2$. Dann gilt:*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Beweis. Wir benutzen die Linearität des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] \\
&= \mathbb{E}[XY - X \cdot \mathbb{E}Y - Y \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[\mathbb{E}Y \cdot X] - \mathbb{E}[\mathbb{E}X \cdot Y] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}Y \cdot \mathbb{E}X - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y + (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$ wie Konstanten behandelt. $\square$

Bemerkung 9.2.5. Für die Berechnung der Kovarianz kann man folgende Formeln benutzen:

(1) Für X, Y diskret:

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{\substack{s \in \operatorname{Im} X \\ t \in \operatorname{Im} Y}} st \cdot \mathbb{P}[X = s, Y = t].$$

(2) Für X, Y absolut stetig mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}$:

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} st \cdot f_{X,Y}(s, t) ds dt.$$

Satz 9.2.6. *Seien $X, Y \in L^2$ Zufallsvariablen und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt:*

$$\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{Cov}(X, Y).$$

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Für die Kovarianz gelten ähnliche Rechenregeln wie für das Skalarprodukt.

Satz 9.2.7. *Seien $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in L^2$ Zufallsvariablen und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt:*

$$\operatorname{Cov}(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n, b_1 Y_1 + \ldots + b_m Y_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{Cov}(X_i, Y_j).$$

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Satz 9.2.8 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *Seien $X, Y \in L^2$ Zufallsvariablen. Dann gilt*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Bemerkung 9.2.9. Zum Vergleich: Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt die Ungleichung
$$|\langle x, y\rangle| = |x| \cdot |y| \cdot |\cos(\phi)| \leq |x||y| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Beweis von Satz 9.2.8. Für beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$0 \leq \mathbb{E}[(aX+Y)^2] = \mathbb{E}[a^2X^2 + 2aXY + Y^2] = a^2\mathbb{E}[X^2] + 2a\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2].$$
Die rechte Seite ist eine quadratische Funktion von a. Diese Funktion ist für alle a nichtnegativ. Die Diskriminante D muss somit ≤ 0 sein:
$$D = 4(\mathbb{E}[XY])^2 - 4\mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2] \leq 0.$$
Das beweist die Behauptung. □

Korollar 9.2.10. *Für beliebige Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ gilt*
$$|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\operatorname{Var} X}\sqrt{\operatorname{Var} Y}.$$

Beweis. Betrachte die zentrierten Zufallsvariablen $\tilde{X} := X - \mathbb{E}X \in L^2$ und $\tilde{Y} := Y - \mathbb{E}Y \in L^2$. Nun wenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Zufallsvariablen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ an:
$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[\tilde{X}^2]}\sqrt{\mathbb{E}[\tilde{Y}^2]} = \sqrt{\operatorname{Var} X}\sqrt{\operatorname{Var} Y}.$$
□

Definition 9.2.11. Seien $X, Y \in L^2$ zwei Zufallsvariablen. Der *Korrelationskoeffizient* von X und Y ist
$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X}\sqrt{\operatorname{Var} Y}}.$$
Dabei nehmen wir an, dass X und Y nicht fast sicher konstant sind, so dass $\operatorname{Var} X \neq 0$ und $\operatorname{Var} Y \neq 0$.

Bemerkung 9.2.12. Aus Korollar 9.2.10 folgt, dass $|\rho(X, Y)| \leq 1$. Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für den linearen Zusammenhang zwischen X und Y. Später werden wir zeigen, dass der Korrelationskoeffizient genau dann ± 1 ist, wenn zwischen X und Y ein linearer Zusammenhang besteht, d.h., wenn $Y = aX + b$.

Bemerkung 9.2.13. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, c > 0$. Dann gilt:
$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y).$$

Bemerkung 9.2.14. $\rho(X, X) = 1$, $\rho(X, -X) = -1$.

Definition 9.2.15. Zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ heißen unkorreliert, wenn $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ (und somit auch $\rho(X, Y) = 0$).

Satz 9.2.16. *Seien $X, Y \in L^2$ unabhängig. Dann sind X und Y unkorreliert, d.h.* $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

Beweis. Für unabhängige Zufallsvariablen gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$. Wir erhalten
$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0.$$
Somit sind X und Y unkorreliert. □

Beispiel 9.2.17. Unabhängige Zufallsvariablen sind unkorreliert. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht. Sei (X, Y) ein Vektor, der gleichverteilt auf dem Einheitskreis

$$A = \{(t, s) : t^2 + s^2 < 1\}$$

ist. Wir behaupten, dass $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ und dass dennoch X und Y abhängig sind.

Lösung. Die gemeinsame Dichte von (X, Y) ist

$$f_{X,Y}(t, s) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_A(t, s).$$

Die Randdichten (d.h. die Dichten von X und Y) sind

$$f_X(t) = f_Y(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \mathbb{1}_{|t|<1}.$$

Wegen Symmetrie sind die Erwartungswerte von X und Y gleich 0:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} t\sqrt{1 - t^2} dt = 0.$$

Nun berechnen wir $\mathbb{E}[XY]$:

$$\mathbb{E}[XY] = \int_A ts f_{X,Y}(t, s) dt ds = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} ts \mathbb{1}_A(t, s) dt ds = 0.$$

Dabei ist das Integral gleich 0, da sich die Funktion $ts\mathbb{1}_A(t, s)$ bei der Transformation $(t, s) \mapsto (-t, s)$ in $-ts\mathbb{1}_A(t, s)$ verwandelt. Somit sind X und Y unkorreliert: $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
Und doch sind X, Y abhängig, denn wären X und Y abhängig, dann müsste die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(t, s)$ mit dem Produkt der Randdichten $f_X(t)f_X(s)$ für alle (t, s) außerhalb einer Menge vom Lebesgue-Maß 0 übereinstimmen. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn

$$f_{X,Y}(t, s) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_A(t, s) \neq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - s^2} \mathbb{1}_{|t|<1, |s|<1} = f_X(t) \cdot f_Y(s)$$

zum Beispiel für alle (t, s) mit $|t| < 1, |s| < 1$ und $t^2 + s^2 > 1$. Somit sind X und Y unkorreliert, aber abhängig.

Satz 9.2.18. *Für beliebige Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ gilt*

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y).$$

Beweis. Mit $\tilde{X} := X - \mathbb{E}X$ und $\tilde{Y} = Y - \mathbb{E}Y$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}[((X - \mathbb{E}X) + (Y - \mathbb{E}Y))^2] \\
&= \mathbb{E}[(\tilde{X} + \tilde{Y})^2] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{X}^2] + 2\mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}] + \mathbb{E}[\tilde{Y}^2] \\
&= \operatorname{Var}(X) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) + \operatorname{Var}(Y).
\end{aligned}$$

□

Korollar 9.2.19. *Für unabhängige Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ gilt*

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y).$$

Bemerkung 9.2.20. Zum Vergleich: Für *beliebige* Zufallsvariablen $X, Y \in L^1$ gilt

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Bemerkung 9.2.21. Für beliebige $X_1, \ldots, X_n \in L^2$ gilt

$$\operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Für unabhängige $X_1, \ldots, X_n \in L^2$ gilt sogar

$$\operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i).$$

Beispiel 9.2.22. Sei $X \sim \operatorname{Bin}(n, p)$ binomialverteilt mit Parametern n, p. Berechne $\operatorname{Var} X$.

Lösung. Wir können X als die Anzahl der Erfolge in einem n-fachen Bernoulli-Experiment auffassen. Wir haben also die Darstellung $X = X_1 + \ldots + X_n$, wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{Erfolg beim } i\text{-ten Experiment,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dabei sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$. Für jedes X_i gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

und

$$\operatorname{Var} X_i = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = \mathbb{E}[X_i] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = p(1-p).$$

Für die Varianz von X erhalten wir (wegen der Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$)

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \operatorname{Var}(X_1) + \ldots + \operatorname{Var}(X_n) = np(1-p).$$

Bemerkung 9.2.23. Die maximale Varianz wird angenommen, wenn $p = \frac{1}{2}$. Die minimale Varianz tritt ein, wenn $p = 0$ oder $p = 1$. (In diesem Fall ist X konstant und $\operatorname{Var} X = 0$).

Im nächsten Satz zeigen wir, dass der Korrelationskoeffizient genau dann gleich ± 1 ist, wenn es einen linearen Zusammenhang zwischen X und Y gibt. Dabei entspricht der Wert $+1$ einem positiven Zusammenhang und -1 einem negativen Zusammenhang.

Satz 9.2.24. *Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen mit $X, Y \in L^2$ und* $\operatorname{Var} X \neq 0$, $\operatorname{Var} Y \neq 0$. *Es gilt:*

(1) $\rho(X, Y) = 1 \Rightarrow$ *es existieren $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}[Y = aX + b] = 1$.*
(2) $\rho(X, Y) = -1 \Rightarrow$ *es existieren $a < 0$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}[Y = aX + b] = 1$.*

Beweis von (1). Sei $\rho(X, Y) = 1$. Definiere

$$a = \frac{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} > 0 \text{ und } b = \mathbb{E}Y - a\mathbb{E}X \in \mathbb{R}.$$

Definiere die Zufallsvariable $\Delta = Y - (aX + b)$. Wir zeigen, dass $\mathbb{P}[\Delta = 0] = 1$. Es gilt

$$\Delta = (Y - \mathbb{E}Y) - a(X - \mathbb{E}X) = \tilde{Y} - a\tilde{X}.$$

Somit ist $\mathbb{E}[\Delta] = \mathbb{E}\tilde{Y} - a\mathbb{E}\tilde{X} = 0$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\Delta &= \mathbb{E}[\Delta^2] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{Y}^2 - 2a\tilde{X}\tilde{Y} + a^2\tilde{X}^2] \\
&= \operatorname{Var}Y - 2a\operatorname{Cov}(X, Y) + a^2\operatorname{Var}X \\
&= \operatorname{Var}Y - 2\frac{\sqrt{\operatorname{Var}Y}}{\sqrt{\operatorname{Var}X}} \cdot \sqrt{\operatorname{Var}X} \cdot \sqrt{\operatorname{Var}Y} + \frac{\operatorname{Var}Y}{\operatorname{Var}X} \cdot \operatorname{Var}X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{P}[\Delta = \mathbb{E}\Delta] = 1$, also $\mathbb{P}[\Delta = 0] = 1$. $\square$