Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
17. Januar 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 10

Abgabe: 24. Januar 2013

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Berechne die Laplace-Transformierte und die charakteristische Funktion von X.

(b) Berechne die Momente $\mathbb{E}X^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X und Y unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Definiere $U = \min(X,Y)$ und $V = \max(X,Y)$. Bestimme $\operatorname{Cov}(X,Y)$ und $\operatorname{Cov}(U,V)$.

Hinweis zu $\operatorname{Cov}(U,V)$*:* $UV = \min(X,Y)\max(X,Y) =$???

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Eine Teilchenquelle emittiert N Teilchen. Dabei sei N eine mit Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable. Jedes Teilchen wird (unabhängig von allen anderen Teilchen und unabhängig von der Anzahl der emittierten Teilchen) mit Wahrscheinlichkeit p von einem Zähler registriert (und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ nicht registriert). Es sei X die Anzahl der registrierten Teilchen. Zeige, dass X ebenfalls Poisson-verteilt ist und bestimme $\mathbb{E}X$.

Hinweis: Bestimme die erzeugende Funktion von X.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $A_1, A_2, ... \subset \Omega$ messbare Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

(c) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$.