Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
24. Januar 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 11

Abgabe: 31. Januar 2013

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte einen Verzweigungsprozess, bei dem jedes Teilchen in Generation n mit Wahrscheinlichkeit $p(1-p)^k$ durch $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ Nachkommen in Generation $n+1$ ersetzt wird. Dabei sei $p \in (0, 1]$ ein Parameter. Bestimme die Aussterbewahrscheinlichkeit q in Abhängigkeit von p. Für welche Werte von p ist $q = 1$?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Du stehst in einem Raum mit n gleich aussehenden Türen. Nur die Tür n führt nach $a_n \in \mathbb{N}$ Schritten in die Freiheit, die Türen $i = 1, \ldots, n-1$ jeweils nach $a_i \in \mathbb{N}$ Schritten zurück in den Raum. Du wählst rein zufällig eine der n Türen. Wenn diese Tür zurück in den Raum führt, wählst du zufällig noch eine Tür (wobei eine Tür mehrmals gewählt werden kann), usw. Bestimme die erwartete Anzahl von Schritten bis in die Freiheit.

Hinweis: Wald-Formel mit der Anzahl falsch gewählter Türen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Bestimme die Verteilungsfunktion von $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ und die Verteilungsfunktion von $m_n := \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und unabhängig. Bestimme die Verteilungsfunktion und die Dichte von $m_n := \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(c) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ und unabhängig. Definiere $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Zeige, dass die Zufallsvariable $M_n - \log n$ für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = e^{-e^{-t}}$$

konvergiert.

Hinweis zu Teil (c): Bestimme $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[M_n - \log n \le t]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 \le 0) = 0$. Bestimme

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{X_1 + \ldots + X_n}\right).$$

Hinweis: Die kürzeste Lösung ist ungefähr drei Zeilen lang.