Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
31. Januar 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 12

Abgabe: 7. Februar 2013

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien gleichverteilt auf $[0, 1]$ und unabhängig. Definiere $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$. Bestimme $\mathbb{E}[M_n]$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

An einer Wahl zwischen zwei Kandidaten A und B nehmen 1000000 Wähler teil. Davon kennen 2000 Wähler den Kandidaten A aus Wahlkampfveranstaltungen und stimmen geschlossen für ihn. Die übrigen 998000 Wähler sind unentschlossen und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer fairen Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg des Kandidaten A?

Hinweis: Sei S die Anzahl der unentschlossenen Wähler, die für A stimmen. Wie groß muss S sein, damit A gewinnt? Die Standardnormalverteilungsfunktion muss im Ergebnis nicht unbedingt numerisch berechnet werden. Approximation ohne $\pm 1/2$-Trick reicht.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Man betrachte folgendes Spiel. Man beginnt mit dem Startkapital $Z_0 = 1$. In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen. Wenn die Münze Kopf zeigt und das aktuelle Kapital gleich x ist, so vergrößert sich das Kapital auf $5x/3$. Wenn die Münze aber Zahl zeigt und das aktuelle Kapital x ist, so verkleinert sich das Kapital auf $x/2$. Es sei Z_n das Kapital nach der n-ten Runde.

(a) Bestimme $\mathbb{E}[Z_n]$ und zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = +\infty$.

(b) Zeige, dass Z_n fast sicher gegen 0 konvergiert (für $n \to \infty$).

Hinweis: Stelle Z_n als Produkt von unabhängigen Zufallsvariablen dar.

Bemerkung: Es handelt sich also um ein vorteilhaftes Spiel, bei dem man fast sicher verliert. Außerdem ist diese Aufgabe ein Beispiel dafür, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] \neq \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} Z_n]$ sein kann.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\lambda > 0$ und X_n eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Geo}(\frac{\lambda}{n})$. Zeige, dass die Folge $\frac{1}{n}X_n$ für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ konvergiert.

Hinweis: Bestimme die charakteristische Funktion von $\frac{1}{n}X_n$.

Bemerkung: Das Ergebnis kann wie folgt interpretiert werden: Werden zu den Zeitpunkten $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$ unabhängige Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{\lambda}{n}$ durchgeführt, so ist die Eintrittszeit des ersten Erfolgs approximativ $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt, für $n \to \infty$.