

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 5

Abgabe: 27. November 2012

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei X eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. $X \sim U[0, 1]$. Berechne die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert von X^2 .

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachte 10^7 Personen, die Lotto (6 aus 49) spielen. Wir nehmen an, dass jede Person auf genau eine Kombination tippt, wobei alle Kombinationen gleichwahrscheinlich seien. Insbesondere, gibt es keine Lieblingsnummern. Außerdem seien die Tipps der verschiedenen Personen unabhängig voneinander. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person 6 Richtige hat

- (a) exakt.
- (b) mit Hilfe der Poisson-Approximation.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

- (a) Zeige, dass für beliebige Ereignisse A_1, \dots, A_n mit $\mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n] \neq 0$ gilt

$$\mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2|A_1] \cdot \mathbb{P}[A_3|(A_1 \cap A_2)] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[A_n|(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})].$$

- (b) In einem Topf liegen n Lose, darunter genau 1 Gewinn. n Personen stehen in einer Warteschlange vor dem Topf. Die Personen ziehen die Lose aus dem Topf ohne Zurücklegen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, die als k -te zieht, gewinnt. Insbesondere, ist es besser als erster oder als letzter zu ziehen?

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- (a) Ein Ereignis A heißt ein Nullereignis, falls $\mathbb{P}[A] = 0$. Seien A_1, A_2, \dots Nullereignisse. Zeige, dass $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ein Nullereignis ist.
- (b) Ein Ereignis B heißt ein fast sicheres Ereignis, falls $\mathbb{P}[B] = 1$. Seien B_1, B_2, \dots fast sichere Ereignisse. Zeige, dass $\cap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ein fast sicheres Ereignis ist.
- (c) Betrachte

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A] = 0 \text{ oder } \mathbb{P}[A] = 1\}.$$

Zeige: \mathcal{A} ist eine σ -Algebra.