

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 6

Abgabe: 6. Dezember 2012

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Zufallsgenerator erzeugt zwei unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen X und Y . Bezeichne mit $Z = |X - Y|$ den Abstand zwischen X und Y . Bestimme die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert von Z .

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1 \sim \text{Geo}(p_1)$ und $X_2 \sim \text{Geo}(p_2)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $p_1 \neq p_2$. Zeige, dass:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2} \cdot ((1 - p_2)^{k-1} - (1 - p_1)^{k-1}), \text{ für alle } k \geq 2.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

- (a) Sei X gleichverteilt auf $[0, 1]$. Zeige: $-\log X$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$.
- (b) Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Berechne die Dichte von X^2 .
Hinweis: Die Dichtetransformationsformel ist nicht direkt anwendbar, da $x \mapsto x^2$ nicht monoton ist. Bezeichne die Verteilungsfunktion von X mit Φ und bestimme im ersten Schritt die Verteilungsfunktion von X^2 .

Aufgabe 4 (5 Punkte) "Sammeln mit Ausschuss"

Betrachte eine Urne, die sowohl n rote, von 1 bis n nummerierte Kugeln, als auch m schwarze Kugeln ("Ausschuss") enthält. Man zieht aus dieser Urne mit Zurücklegen so lange, bis jede rote Kugel mindestens einmal gezogen wurde. Es sei X die Anzahl dieser Ziehungen. Bestimme $\mathbb{E}X$.
Hinweis: Stelle X als eine Summe von passenden Zufallsvariablen dar.