Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
6. Dezember 2012

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 7

Abgabe: 13. Dezember 2012

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Sei X_1 geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$. Berechne die Varianz von X_1.

(b) Sei X_2 exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne die Varianz von X_2.

(c) Sei Y_1 eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$\mathbb{P}[Y_1 \le y] = 1 - \left(\frac{c}{y}\right)^k, \qquad y \ge c,$$

wobei $c > 0$ und $k > 0$ Parameter sind. Berechne den Erwartungswert und die Varianz von Y_1.

(d) Sei Y_2 gleichverteilt auf der endlichen Menge $\{1, \dots, n\}$, d.h. $\mathbb{P}[Y_2 = k] = \frac{1}{n}$ für $k = 1, \dots, n$. Berechne den Erwartungswert und die Varianz von Y_2.

Hinweis. Teile a und b: Die Erwartungswerte $\mathbb{E}X_1 = 1/p$ und $\mathbb{E}X_2 = 1/\lambda$ können als bekannt vorausgesetzt werden. Teil c: $\mathbb{E}Y_1$ und $\operatorname{Var} Y_1$ müssen nicht für alle Parameterwerte existieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X und Y zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit $\operatorname{Var} X > 0$, $\operatorname{Var} Y > 0$. Zeige, dass für die Kovarianz $\operatorname{Cov}(X,Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(X,Y)$ gilt:

(a) $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \operatorname{Cov}(X,Y)$, für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(b) $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X,Y)$, für alle $a, c > 0$ und $b, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei (X,Y) ein Zufallsvektor mit folgender Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{, falls } 0 \le x, y < 1 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $f_{X,Y}$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1 \text{ und } f_{X,Y}(x,y) \ge 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechne die Randdichten, d.h. die Dichten von X und Y.

(c) Berechne die Dichte von $X + Y$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ und unabhängig. Zeige, dass die Zufallsvariable $\frac{X_1}{X_2}$ Cauchy-verteilt ist, d.h.

$$f_{\frac{X_1}{X_2}}(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$