Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
13. Dezember 2012

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 8

Abgabe: 20. Dezember 2012

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2}) \cdot (y+\frac{1}{2}) & \text{, falls } 0 \leq x, y < 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $f_{X,Y}$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1 \text{ und } f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimme die Dichten von X, Y, $X \cdot Y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \text{Geo}(p_i)$, wobei $p_1, \ldots, p_n \in (0,1)$. Definiere $M := \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Bestimme $\mathbb{P}[M \geq m]$ für $m \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimme $\mathbb{P}[M = m]$ für $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Seien X und Y zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$ und $E[X] = E[Y]$. Zeige, dass dann $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert sind.

(b) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen, wobei $X \sim U[-1,1]$ gleichverteilt auf $[-1,1]$ ist und $Y = X^2$. Zeige, dass X und Y unkorreliert, aber dennoch abhängig sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

An einem Stab der Länge 1 werden zufällig, unabhängig voneinander und gleichverteilt zwei Stellen X und Y markiert. An diesen Stellen wird der Stab durchgesägt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich aus den so gewonnenen Stücken ein Dreieck bilden?

Hinweis: Damit man aus drei Strecken der Längen a, b, c ein Dreieck bilden kann, ist es notwendig, dass $a + b > c$. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend.