Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
10. Januar 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 9

Abgabe: 17. Januar 2013

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne $\mathbb{E}(X^3)$.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

(a) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Berechne die erzeugende Funktion von X.

(b) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Zeige mithilfe von erzeugenden Funktionen, dass

$$\mathbb{E}X = np \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}\, X = np(1-p).$$

(c) Seien $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$ und $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$ unabhängige Zufallsvariablen. Zeige mithilfe von erzeugenden Funktionen, dass $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, d.h. $X_i \sim U[0,1]$, $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass für das geometrische Mittel von $X_1, \dots, X_n$ gilt:

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot ... \cdot X_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{f.s.}}{\longrightarrow}} \frac{1}{e}.$$

Hinweis: Betrachte $\ln\left(\sqrt[n]{X_1 \cdot ... \cdot X_n}\right)$ und zeige, dass $\mathbb{E}[\ln X_i] = -1$. Dabei ist $e = 2.71\dots$ die Eulersche Zahl, also die Basis des natürlichen Logarithmus.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, ...$ (möglicherweise abhängige) Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Exp}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} 0 \text{ und } X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0.$$

Hinweis zu L^2-Konvergenz: Benutze die Definition, berechne $\mathbb{E}[(X_n - 0)^2]$.