Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Wintersemester 2012/2013
Dezember 2012

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Aufgaben zur Klausurvorbereitung: Teil 1

Aufgabe 1

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen.

(a) Man gebe den Wahrscheinlichkeitsraum dieses Zufallsexperiments an.

(b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die maximale Augenzahl gleich 4 ist.

(c) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Würfe gleich und der dritte strikt größer als die ersten beiden ist.

(d) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Würfe eine strikt aufsteigende Folge bilden. (Beispiel: $(3, 5, 6)$ ist eine strikt aufsteigende Folge, $(3, 3, 5)$ dagegen nicht).

Aufgabe 2

Man würfelt mit einem fairen Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

(a) mindestens eine 6 in 6 Würfen erzielt?

(b) mindestens 2 Sechsen in 12 Würfen erzielt?

(c) mindestens 3 Sechsen in 18 Würfen erzielt?

Welcher dieser drei Ereignisse hat die höchste Wahrscheinlichkeit?

Hinweis: In allen drei Fällen das Gegenereignis betrachten.

Aufgabe 3

Man wirft einen fairen Würfel zweimal.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahlen verschieden sind?

(b) Gegeben, dass die Augenzahlen verschieden sind, wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme gleich 8 ist?

(c) Gegeben, dass die Augensumme gleich 8 ist, wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahlen verschieden sind?

Aufgabe 4

Beim Lotto "6 aus 49" werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 49 Kugeln zufällig entnommen. Die Kugeln in der Urne sind nummeriert mit $1, \dots, 49$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Lotto "6 aus 49" alle 6 gezogenen Kugeln ungerade Nummern haben?

(b) Sie tippen einmal auf eine Kombination aus 6 verschiedenen Nummern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens 5 Richtige haben?

(c) Sie tippen bei 3 unterschiedlichen unabhängigen Ziehungen. (Nach jeder Ziehung werden die 6 gezogenen Kugeln zurück in die Urne gelegt). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens einmal 6 Richtige haben?

Aufgabe 5

52 Karten, davon 26 schwarz und 26 rot, werden zufällig an 2 Spieler verteilt. Jeder Spieler bekommt genau 26 Karten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler die gleiche Anzahl an schwarzen Karten bekommen.

Aufgabe 6

Zwölf Politiker, darunter auch X und Y, nehmen an einem runden Tisch völlig zufällig Platz. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X und Y nebeneinander sitzen.

Aufgabe 7

n Studenten betreten einen Raum mit k Plätzen, wobei $n \leq k$. Die Plätze seien mit $1, \ldots, k$ nummeriert. Sudenten wählen sich Plätze völlig zufällig, allerdings so, dass kein Platz von mehr als einer Person besetzt wird. Es kann angenommen werden, dass alle Plätze von jedem Studenten als gleichwahrscheinlich angesehen werden. Insbesondere gibt es keine Lieblingsplätze.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Platz 1 besetzt wird.

(b) Es sei A_i das Ereignis, dass Platz i besetzt wird. Bestimmen Sie $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_1}, \mathbb{1}_{A_2})$.

Aufgabe 8

Zwei Schützen, genannt S_1 und S_2, schießen gleichzeitig (und jeweils genau einmal) auf ein Ziel. Die Wahrscheinlichkeit, dass Schütze S_1 trifft, ist p_1, beim zweiten Schützen ist die Wahrscheinlichkeit p_2. Nachdem beide Schützen geschossen haben, stellt es sich heraus, dass das Ziel von genau einer Kugel getroffen wurde. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass es der erste Schütze war, der traf?

Aufgabe 9

Die Bildzeitung wird täglich von 21% der männlichen und 13% der weiblichen Bevölkerung in Deutschland gelesen. 51% der Bevölkerung ist weiblich.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Bevölkerung gewählte Person die Bildzeitung liest?

(b) Eine Person lese die Bildzeitung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie männlich ist?

Aufgabe 10

Zwei Münzen seien gegeben. Die erste Münze zeigt Kopf mit Wahrscheinlichkeit p_1, die zweite Münze zeigt Kopf mit Wahrscheinlichkeit p_2. Beide Münzen werden gleichzeitig geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie verschiedene Symbole zeigen.

Aufgabe 11

Um einen Test zu bestehen, muss ein Student von 10 Fragen mindestens 7 richtig beantworten. Die 10 Fragen für den Test werden aus 50 Fragen zufällig (und ohne Wiederholung) ausgewählt. Die 50 Fragen sind dem Studenten im Vorab bekannt. Von diesen 50 Fragen kann der Student 30 richtig beantworten, die restlichen 20 beantwortet er falsch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student den Test besteht?

Aufgabe 12

Gegeben seien zwei gleich aussehende Münzen. Die erste Münze ist fair, die zweite Münze zeigt Kopf mit Wahrscheinlichkeit 1/3. Eine der beiden Münzen wird zufällig ausgewählt und geworfen. Es stellt sich heraus, dass die Münze Kopf zeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um die faire Münze?

Aufgabe 13

In einer Urne befinden sich 5 weiße, 3 rote und 10 schwarze Kugeln.

(a) Es wird 10-mal *ohne* Zurücklegen gezogen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \text{“es werden genau 5 schwarze Kugeln gezogen”}.$$

(b) Es wird 10-mal *mit* Zurücklegen gezogen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$B = \text{“bei genau 3 Ziehungen wird eine weiße und bei genau 2 Ziehungen eine rote Kugel gezogen”}.$$

Aufgabe 14

Ein Insekt legt 2000 Eier, aus jedem Ei entsteht (unabhängig von allen anderen Eiern) mit Wahrscheinlichkeit 10^{-3} ein Nachkomme. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als zwei Nachkommen gibt

(a) exakt

(b) approximativ, mit Hilfe der Poisson-Approximation.

Als Ergebnis geben Sie bitte nur endliche Summen an (also keine unendlichen Reihen).

Aufgabe 15

Ein Experiment bestehe darin, dass man zehn faire Münzen gleichzeitig wirft. Dieses Experiment werde 1000 Mal ausgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Approximation reicht), dass bei mindestens einem der 1000 Experimente alle zehn Münzen Kopf zeigen?

Aufgabe 16

Wie oft muss man mit zwei fairen Würfeln würfeln, damit mit Wahrscheinlichkeit mindestens 1/2 mindestens einmal die Augensumme gleich 12 ist?

Hinweis. Beantworten Sie zuerst die folgende Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer n-fachen Ausführung eines Wurfs mit zwei fairen Würfeln die Augensumme mindestens einmal gleich 12 ist?

Aufgabe 17

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie: Aus $\mathbb{P}(A_1 \Delta A_2) = 0$ folgt, dass $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1)$.

Aufgabe 18

Die Zufallsvariablen X, Y, Z seien unabhängig und gleichverteilt auf der Menge $\{0, 1, -1\}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X + Y + Z = 0$.

Aufgabe 19

(a) Man würfelt mit einem fairen Würfel bis man eine 6 gewürfelt hat. Es sei X die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$.

(b) Man würfelt mit einem fairen Würfel bis man jede Augenzahl mindestens einmal gesehen hat. Sehen z. B. die Ergebnisse so aus:

$$6, 4, 6, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 6, 1,$$

so stoppt man nach Wurf 11. Bei Wurf 10 sah man nämlich alle Augenzahlen, außer der 1, die dann bei Wurf 11 kam. Es sei Y die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie $\mathbb{E}Y$.

Hinweis: Hat man bereits genau 3 verschiedene Augenzahlen gesehen, wie lange muss man im Durchschnitt auf eine Augenzahl warten, die man noch nicht gesehen hat? Der Erwartungswert ist additiv.

Aufgabe 20

In einer Urne liegen 20 rote und 30 weiße Kugeln.

(a) Es werden zwei Kugeln *ohne Zurücklegen* zufällig entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln verschiedene Farben haben?

(b) Es werden zwei Kugeln *mit Zurücklegen* zufällig entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln verschiedene Farben haben?