Gesetze der großen Zahlen

Beispiel 1: Bernoulli-Experiment wird unendlich oft wiederholt.
Sei nun Erfolgswahrscheinlichkeit $= p$

$$\begin{aligned} X_i &= \begin{cases} 1, & \text{wenn Experiment ein 'Erfolg'} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ S_n &= X_1 + ... + X_n \text{ (Anzahl Erfolge in n Experimenten)} \end{aligned}$$

Dann folgt nach dem Gesetz der großen Zahlen(GGZ)

$$\text{GGZ: } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} p$$

Beispiel 2: Würfeln mit einem fairen Würfel

$$\begin{aligned} X_i &= \text{Augenzahl bei Wurf i} \\ S_n &= X_1 + ... + X_n \text{(Augensumme n Würfe)} \\ \mathbb{E}X_n &= \frac{1}{6}(1+2+...+6) = 3.5 \end{aligned}$$

Dann folgt nach dem Gesetz der großen Zahlen (GGZ)

$$\text{GGZ: } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 3.5$$

Stochastische Konvergenz und L^2-Konvergenz

Definition: Folge von Zuvallsvariablen z_1,z_2,...: $\Omega \to \mathbb{R}$ konverviert stochastisch (oder in Wahrscheinlichkeit) gegen Zufallsvariable Z: $\Omega \to \mathbb{R}$, wenn $\forall \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\omega \in \Omega : |Z_n(\omega) - Z(\omega)| > \epsilon\right] &= 0 \\ \text{einfacher: } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|Z_n - Z| > \epsilon\right] &= 0 \end{aligned}$$

Definition: Folge von Zuvallsvariablen z_1,z_2,...: $\Omega \to \mathbb{R}$ konverviert gegen Z: $\Omega \to \mathbb{R}$ in L^2(im quadr. Mittel), wenn

$$Z_n \in L^2, Z \in L^2 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(Z_n - Z)^2\right] = 0$$

Bezeichnung: $Z_n \xrightarrow{n\to\infty} Z$
Wir werden zeigen: $Z_n \xrightarrow{L^2} Z \Rightarrow Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$, aber $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z \not\Rightarrow Z_n \xrightarrow{L^2} Z$

Satz 1:
Sei $z > 0$ eine ZV. Dann gilt

$$\forall a > 0 : \mathbb{P}\left[Z \geq a\right] \leq \frac{\mathbb{E}Z}{a}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &\geq \begin{cases} a, & Z(\omega) \geq a \\ 0, & Z(\omega) < 0 \end{cases} \\ Z &\geq a\mathbb{1}_{Z\geq a} \\ \mathbb{E}Z &\geq \mathbb{E}\left[a\mathbb{1}_{Z\geq a}\right] \\ \mathbb{E}Z &\geq a\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z\geq a}\right] \\ \mathbb{E}Z &\geq a\mathbb{P}\left[Z \geq a\right] \end{aligned}$$

Satz 2 (Ungleichung von Tschebyschew):
Sei $x \in L^2$ eine ZV. Dann gilt $\forall a > 0$:

$$\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}X| \geq a\right] \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Beweis:

$$\mathbb{P}\left[\underbrace{(X - \mathbb{E}X)^2}_{Z\geq 0} \geq a^2\right] \overset{\text{(Satz 1)}}{\leq} \frac{\mathbb{E}Z}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$

Satz 3 (Markow Ungleichung): Sei $Z \geq 0$ eine ZV, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, f $\uparrow$. Dann gilt $\forall a > 0$:

$$\mathbb{P}\left[Z \geq a\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[f(Z)\right]}{f(a)}$$

Bemerkung: $f(z) = z \Rightarrow$ Satz 1

Beweis:

$$\mathbb{P}\left[Z \geq a\right] \overset{f\uparrow}{=} \mathbb{P}\left[f(z) \geq f(a)\right] \overset{\text{Satz 1}}{\leq} \frac{\mathbb{E}\left[f(Z)\right]}{f(a)}$$

Satz 4:

$$\text{Sei } Z_n \xrightarrow{L^2} Z. \text{ Dann gilt: } Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$$

Beweis:

$Z_n \xrightarrow{L^2} Z \Rightarrow \mathbb{E}\left[(Z_n - Z)^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Sei $\epsilon > 0$:

$\mathbb{P}\left[|Z_n - Z| \geq \epsilon\right] = \mathbb{P}\left[(Z_n - Z)^2 \geq \epsilon^2\right] \overset{\text{Satz 1}}{\leq} \dfrac{\mathbb{E}\left[(Z_n - Z)^2\right]}{\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|Z_n - Z| \geq \epsilon\right] = 0 \Rightarrow Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$

Satz 5 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen (Schwaches GGZ)):

Seien $X_1, X_2, ...\Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV mit $\mathbb{E}X_i = \mu, Var(X_i) = \sigma^2 \ \forall i \in \mathbb{N}$.
Dann gilt:

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \overset{L^2,\mathbb{P}}{\rightarrow} \mu \text{ für n} \to \infty$$

Beweis:

$S_n = X_1 + ... + X_n,\ \mathbb{E}S_n = n\mu,\ Var(S_n) = n\sigma^2$

L^2-Konvergenz:

$\mathbb{E}\left[(\dfrac{S_n}{n} - \mu)^2\right] = \mathbb{E}\left[(\dfrac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n})^2\right] = \dfrac{1}{n^2} Var(S_n) = \dfrac{1}{n^2} n\sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \mu \overset{\text{(Satz 4)}}{\Rightarrow} \dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$

Beispiel: Würfeln mit einem fairen Würfel

$S_n = \text{Augensumme},\ \mu = 3.5,\ \dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$

$\mathbb{P}\left[3.49 \leq \dfrac{S_n}{n} \leq 3.51\right] \to 1$