Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2012/2013

Zufallsfelder
Übungsblatt 1

Besprechung: Donnerstag, 8. November 2012, 16:15 Uhr

Aufgabe 1

Zeige die Existenz eines Zufallsfeldes $X = \{X(t),\ t \in T\}$ mit den folgenden endlich dimensionalen Verteilungen. Gib dabei auch die Räume $(E_{t_1,\dots,t_n}, \mathcal{E}_{t_1,\dots,t_n})$ an.

(a) $X(t) \sim Poi(\lambda_t)$, $\lambda_t > 0$, $t \in T$ und $X(s), X(t)$ unabhängig für beliebige $s, t \in T$, $s \neq t$.

(b) $(X(t_1), \dots, X(t_n)) \sim S_\alpha(\Gamma, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$.

Hinweis: Verwende die Aussage aus Aufgabe 1 vom ersten Übungsblatt in Stochastik II.

Aufgabe 2

Gib ein Beispiel eines nicht-stetigen Zufallsfeldes, welches eine stetige Modifikation besitzt.

Aufgabe 3

Sei $Y_1 \sim U[0,1]$ eine gleichverteilte Zufallsvariable und Y_2 ein d-dimensionaler Zufallsvektor der unabhängig von Y_1 ist. Die zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$ definiert durch $X(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi Y_1 + \langle t, Y_2\rangle)$ heißt Kosinus Welle.

(a) Berechne den Erwartungswert von $X(t)$ für $t \in \mathbb{R}^d$

(b) Bestimme die Kovarianzfunktion von X

Hinweis: Mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei das Skalarprodukt bezeichnet.

Aufgabe 4

Sei $\Phi = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ ein homogener Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\lambda > 0$. Sei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine (deterministische) Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|dx < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}^d} g^2(x)dx < \infty$. Definiere die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ durch

$$X(t) = \sum_{x \in \Phi} g(t - x), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

(a) Zeige, dass

$$EX(t) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx \quad \forall\ t \in \mathbb{R}^d$$

(b) Zeige, dass

$$Cov(X(s), X(t)) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} g(t - s - x)g(x)dx \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}^d$$

Hinweis: Verwende algebraische Induktion bezüglich g.