Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2012/2013

Zufallsfelder
Übungsblatt 2

Besprechung: Donnerstag, 22. November 2012, 16:15 Uhr

Aufgabe 1

Seien Φ_1 und Φ_2 zwei unabhängige homogene Poisson-Prozesse in $\mathbb{R}^d$ mit Intensitäten $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

(a) **Unabhängige Ausdünnung:** Sei $0 < p < 1$ und $\{Z_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen unabhängig von Φ_1 mit $Z_1 \sim Ber(p)$. Definiere $\tilde{\Phi}$ wie folgt: Für jedes $x_i \in \Phi_1$ sei

$$x_i \in \tilde{\Phi} \Leftrightarrow Z_i = 1, \qquad i \in \mathbb{N}$$

Zeige, dass $\tilde{\Phi}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_1 p$ ist.

(b) **Superposition:** Zeige, dass $\Phi := \Phi_1 \cup \Phi_2$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_1 + \lambda_2$ ist.

Aufgabe 2

Sei $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ ein lokal endliches Maß und Φ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ. Zeige, dass es genau dann eine Zahl $\lambda > 0$ gibt, sodass

$$\Lambda(B) = \lambda \nu_d(B), \qquad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d),$$

wenn Φ stationär ist, wobei ν_d das d-dimensionale Lebesguemaß bezeichnet.

Aufgabe 3

Definiere den Prozess $X = \{X(t),\ t \in [0, \infty)\}$ wie folgt:

$$\begin{cases} P(X(0) = 1) = P(X(0) = -1) = \frac{1}{2} & \\ X(t) = X(0) \cdot (-1)^{\Phi([0,t])} & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

wobei Φ ein homogener Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit Intensität $\lambda > 0$ sei. Weiterhin sei Φ unabhängig von $X(0)$.

(a) Berechne Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion von X.

(b) Seien $V_0, V_1, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $V_0 \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$. Definiere den Prozess $\tilde{X}$ wie folgt:

$$\begin{cases} \tilde{X}(0) = V_0 & \\ \tilde{X}(t) = V_{\Phi([0,t])} & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

Ist $\tilde{X}$ ein Gaußscher Prozess?

Aufgabe 4

Sei $\mu = \{\mu(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Gaußsches Zufallsmaß , d.h.

$$\begin{cases} \mu(B) \sim N(0, \sigma^2 \nu_d(B)) & \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \\ Cov(\mu(B_1), \mu(B_2)) = \sigma^2 \nu_d(B_1 \cap B_2) & \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

und einem $\sigma^2 > 0$. Sei $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$ definiert durch

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t - x) \mu(dx)$$

wobei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion sei mit $g \in L_1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu_d) \cap L_2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu_d)$. Zeige, dass X ein Gaußsches Zufallsfeld ist und gib die endlich-dimensionalen Verteilungen an.