Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2012/2013

Zufallsfelder
Übungsblatt 3

Besprechung: Donnerstag, 6. Dezember 2012, 16:15 Uhr

Aufgabe 1

Sei $X = \{X(t),\ t \in T_N\}$ das Ising-Model aus der Vorlesung.

(a) Zeige, dass X bzgl. $\sim_4$ die Markov Eigenschaft besitzt. Gilt dies auch bzgl. $\sim_8$?

(b) Sei $\Gamma \subset T_N$ beliebig und $P^{\Gamma}_{T_N}$ die gemeinsame Verteilung von $\{X(t),\ t \in \Gamma\}$, d.h. für $\Gamma = \{t_1, \dots, t_n\}$ gilt $P^{\Gamma}_{T_N}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = P(X(t_1) = x_{t_1}, \dots, X(t_n) = x_{t_n})$. Die Funktion $\sigma_\Gamma = E \prod\limits_{t\in\Gamma} X(t)$ heißt Korrelationsfunktion. Zeige:

$$P^{\Gamma}_{T_N}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = \frac{(-1)^k}{2^n} \sum_{\Gamma' \subset \Gamma} C_{\Gamma'} \sigma_{\Gamma'}$$

wobei $k = |\{i :\ x_{t_i} = -1\}|$ und $C_{\Gamma'} = \prod\limits_{t \in \Gamma \setminus \Gamma'} x_t$

(c) Sei $J = 0$. Zeige, dass für $\Gamma \subset T_N$ die Korrelationsfunktion σ_Γ gegeben ist durch

$$\sigma_\Gamma = \left(\frac{\exp(-\frac{mB}{K_0 t_0}) - \exp(\frac{mB}{K_0 t_0})}{\exp(-\frac{mB}{K_0 t_0}) + \exp(\frac{mB}{K_0 t_0})} \right)^{|\Gamma|}$$

Aufgabe 2

Seien $\{\langle X^{r_1}(t_1), \dots, X^{r_n}(t_n)\rangle\}$ die Kumulanten von $P_{t_1,\dots,t_n}$, d.h.

$$\langle X^{r_1}(t_1), \dots, X^{r_n}(t_n)\rangle = \frac{1}{i^{|r|}} \frac{\partial^{|r|}}{\partial z_1^{r_1}, \dots, \partial z_n^{r_n}} \log \varphi_{t_1,\dots,t_n}(z_1, \dots, z_n)|_{z=0}$$

mit $r = (r_1, \dots, r_n)^T \in \mathbb{N}^n$, $t_1, \dots, t_n \in T$ und $|r| = \sum\limits_{i=1}^n r_i$. Zeige, dass $\log \varphi_{t_1,\dots,t_n}(z_1, \dots, z_n)$ unendlich oft differenzierbar ist, falls $E|X(t)|^n < \infty$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.