Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2012/2013

Zufallsfelder
Übungsblatt 4

Besprechung: Donnerstag, 20. Dezember 2012, 16:15 Uhr

Aufgabe 1

Zeige die folgenden Eigenschaften der Kumulanten:

(a) Symmetrie: Für jede Permutation $\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ gilt:

$$\langle X^{r_{\pi(1)}}(t_1),\dots,X^{r_{\pi(n)}}(t_n)\rangle = \langle X^{r_1}(t_1),\dots,X^{r_n}(t_n)\rangle$$

(b) Multilinearität: Für beliebige $a,b \in \mathbb{R}$ und $t_0,t_1,\dots,t_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\langle aX(t_0)+bX(t_1),X(t_2)\dots,X(t_n)\rangle = a\,\langle X(t_0),X(t_2)\dots,X(t_n)\rangle + b\,\langle X(t_1),X(t_2)\dots,X(t_n)\rangle$$

(c) Sei $\{t_1,\dots,t_n\} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A,B \neq \emptyset$ sodass $\{X(t),\ t \in A\}$ und $\{X(t),\ t \in B\}$ unabhängig sind. Dann gilt $S_X(t_1,\dots,t_n,r)=0$, für jedes $r \in \mathbb{R}^n$.

(d) $C(s,t) = \langle X(s),X(t)\rangle$ für beliebige $s,t \in T$.

Aufgabe 2

Zeige den folgenden Zusammenhang zwischen den Kumulanten $\langle X^n\rangle$ einer Zufallsvariablen X und deren Momente μ_n, wobei $E|X|^n < \infty$:

$$\langle X^n\rangle = \mu_n - \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\left\langle X^i\right\rangle \mu_{n-i}$$

Aufgabe 3

Gib ein Beispiel für ein Zufallsfeld welches stationär im weiten Sinne ist, aber nicht strikt stationär.

Aufgabe 4

Sei $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$ ein Shot-Noise Feld,

$$X(t) = \sum_{x\in\Phi} g(t-x)$$

Zeige, dass X stationär im weiten Sinne ist.

Aufgabe 5

Sind folgende Funktionen $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Kovarianzfunktionen?

(a) $C(x) = \begin{cases} 1 & ,\ x = 0 \\ \frac{1}{2} & ,\ x \neq 0 \end{cases}$

(b) $C(x) = \sin(x)$

(c) $C(x) = \begin{cases} \exp(-|x|) & ,\ x \in \mathbb{Z} \\ 0 & ,\ \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 6

Berechne für folgende Funktionen $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Spektraldichten.

(a) $C(x) = \exp(-x^2)$

(b) $C(x) = \exp(-|x|)$

(c) $C(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2} & ,\ -2 \le x \le 2 \\ 0 & ,\ \text{sonst} \end{cases}$