Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth WS 2012/2013

Zufallsfelder
Übungsblatt 5

Besprechung: Donnerstag, 10. Januar 2013, 16:15 Uhr

Aufgabe 1

Zeige: Eine Funktion $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist reellwertig, stetig und positiv semidefinit genau dann, wenn ein endliches Maß F auf $[0, \infty)$ existiert, sodass

$$C(x) = \int\limits_{[0,\infty)} \cos(xt) dF(t)$$

Aufgabe 2

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Kosinuswellen, d.h.

$$X_i(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi Y_i^{(1)} + \left\langle t, Y_i^{(2)} \right\rangle).$$

Dabei seien die Folgen $\{Y_i^{(1)}\}$ und $\{Y_i^{(2)}\}$ unabhängig mit $Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \ldots \overset{i.i.d.}{\sim} U[0, 1]$ und $Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}, \ldots \overset{i.i.d.}{\sim} P_Y$ (siehe auch Aufgabe 3 von Blatt 1).
Sei nun $Z = \{Z(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ ein zentriertes, stationäres, Gaussches zufälliges Feld mit Kovarianzfunktion $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $Var(Z(t)) = 1$, $\forall\ t \in \mathbb{R}^d$. Finde einen Algorithmus, mit dem man Z approximativ simulieren kann (bzgl. Konvergenz in Verteilung). Verwende dazu die obige Konstruktion. Wie ist P_Y zu wählen?

Aufgabe 3

Zeige, dass für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit den angegebenen Werten von d durch $f(|| \cdot ||_d)$ eine positiv semidefinite Funktion gegeben ist, wobei $|| \cdot ||_d$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

(a) $f(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \exp(-a_j x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j}$, für beliebige $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_n > 0$, $d \in \mathbb{N}$.

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\lambda}$, für beliebige $\lambda > 0$, $d \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Funktionen $\gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sind Variogramme?

(a) $\gamma(h) = -\log(\frac{1}{||h||_d+1})$.

(b) $\gamma(h) = 1 - \frac{1}{||h||_d+1}$.

(c) $\gamma(h) = \frac{1}{||h||_d+1}$