Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2012/2013

Zufallsfelder
Übungsblatt 6

Besprechung: Donnerstag, 24. Januar 2013, 16:15 Uhr

Aufgabe 1

Sei $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ die fraktale Brownsche Bewegung mit Hurst-Parameter $H \neq \frac{1}{2}$. Zeige, dass X i.A. keine unabhängigen Zuwächse hat.

Aufgabe 2

Sei $X = \{X(t),\ t \in T\}$ ein zentriertes Gaußsches zufälliges Feld, definiert auf einer kompakten Menge $T \subset \mathbb{R}^d$ und $\operatorname{diam}(T) := \sup_{s,t \in T} d(s,t) < \infty$. Dabei sei $d(s,t) := \sqrt{2\gamma(s,t)} < \infty$ die kanonische Pseudometrik auf T, wobei mit γ das Variogramm von X bezeichnet sei. Es ist bekannt, dass aus der Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$\int_\delta^\infty p(e^{-u^2})\, du < \infty,$$

die f.s. Stetigkeit des Feldes X folgt. Hierbei ist $p^2(u) = \sup_{|s-t| \leq u} 2\gamma(s,t)$. Zeige, dass X f.s. stetig ist, falls $\exists\ K \in (0,\infty)$ und $\alpha, \eta > 0$ mit

$$\gamma(s,t) \leq \frac{K}{|\log|s-t||^{1+\alpha}}$$

für alle $s, t \in T$ mit $|s-t| < \eta$.

Aufgabe 3

Sei ν ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $d \geq 1$. Seien $Y, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallselemente auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sodass $Y \sim \operatorname{Poi}(\nu(\mathbb{R}^d))$ und $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. d-dimensionale $\mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbare Zufallsvektoren sind mit $P_{X_1}(B) = \nu(B)/\nu(\mathbb{R}^d)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Das zufällige Maß $W : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \Omega \to [0,\infty]$ definiert durch

$$W(B,\omega) = \sum_{j=1}^{Y(\omega)} \mathbb{1}_B(X_j(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

heißt Poissonsches Zufallsmaß. Zeige, dass das Poissonsche Zufallsmaß, gegeben auf dem Semiring der beschränkten Borelmengen in $\mathbb{R}^d$, ein orthogonales nicht zentriertes zufälliges Maß ist.

Aufgabe 4

Sei $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ ein komplexwertiger stochastischer Prozess, $X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)\ \forall t \in \mathbb{R}$, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $E|X(s) - X(t)|^2 \to 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s \downarrow t$

(b) X besitzt unkorrelierte Zuwächse, d.h. $E(X(t_2) - X(t_1))\overline{(X(t_3) - X(t_2))} = 0$ für beliebige $t_1 < t_2 < t_3$.

Definiere die Familie W von Zufallsvariablen auf dem Semiring $\mathcal{K} = \{(a,b],\ -\infty < a \leq b < \infty\}$ durch $W((a,b]) := X(b) - X(a)$, wobei $(a,a] = \emptyset$. Zeige, dass W ein orthogonales zufälliges Maß auf $\mathcal{K}$ ist.