Prof. Dr. Evgeny Spodarev WS 2012/2013
Dipl.-Math. Stefan Roth

Zufallsfelder
Übungsblatt 7

Besprechung: Donnerstag, 7. Februar 2013, 16:15 Uhr

Aufgabe 1

Sei X die fraktale Brownsche Bewegung (fBM) mit Hurst-Parameter $H \in (0,1)$. Zeige:

(a) Die fBM ist H-selbstähnlich, d.h.

$$\forall\ a > 0,\ \forall\ t \geq 0 \ \text{ gilt } \ X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t).$$

(b) Für $H > 1/2$ sind die Zuwächse der fBM positiv korreliert und langzeitkorreliert (long-range dependent), d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[X(1)\left(X(n+1) - X(n)\right)\right] = \infty. \tag{1}$$

(c) Für $H < 1/2$ sind die Zuwächse der fBM negativ korreliert und short-range dependent, d.h. die Reihe in (1) konvergiert.

(d) Die fBM besitzt eine Hölderstetige Version der Ordnung $\gamma \in [0, H)$.

Hinweis: Ein Prozess $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ besitzt eine Hölderstetige Version der Ordnung $\gamma \in [0, \beta/\alpha)$, falls $\forall\ T > 0$ existieren $\alpha, \beta, C > 0$, sodass

$$E|Y(t) - Y(s)|^{\alpha} \leq C|t - s|^{1+\beta}$$

$\forall\ 0 \leq s, t \leq T$.

(e) Sei $p \geq 1$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\pi \in \{\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\},\ n \in \mathbb{N},\ t_1, \ldots, t_{n-1} \in T\}$ eine Partition des Intervalls $[0,T]$. Definiere

$$\begin{aligned} v_p(f;\pi) &:= \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \\ v_p^0(f) &:= \lim_{|\pi|\to 0} v_p(f;\pi) \\ v_p(f) &:= \sup_{\pi} v_p(f;\pi). \end{aligned}$$

Sei nun $T = 1$. Zeige:

$$\begin{cases} v_p^0(X) = 0 \ a.s. & \text{falls } pH > 1 \\ v_p(X) = \infty \text{ und } v_p^0(X) \text{existiert nicht} & \text{falls } pH < 1 \end{cases}$$

Bemerkung:

- Mit $|\pi|$ sei die Feinheit der Partition π bezeichnet, d.h. $|\pi| = \sup_k\{|t_k - t_{k-1}|\}$.
- $\lim_{|\pi|\to 0} v_p(f;\pi)$ existiert genau dann, wenn für jede Folge $\{\pi_n\}$ von Partitionen mit $|\pi_n| \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$ der Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} v_p(f;\pi_n)$$
existiert und unabhängig ist von der Wahl der Folge $\{\pi_n\}$.
- Wir sagen, dass f endliche p-Variation hat, falls der Grenzwert $v_p^0(f)$ existiert und endlich ist. Außerdem sagen wir, dass f beschränkte p-Variation hat, falls $v_p(f) < \infty$.
- Es darf verwendet werden, dass für die Partition $\pi_n = \{k/n,\ k = 1, \ldots, n\}$ von $[0,1]$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} v_p(X;\pi_n) = \begin{cases} \infty & \text{falls } p < 1/H \\ E|X(1)|^p & \text{falls } p = 1/H \\ 0 & \text{falls } p > 1/H \end{cases}$$
im L_2-Sinne (also auch in Wahrscheinlichkeit).