Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Anil Aslaner

22.Oktober 2012

Klassen von Zufallsereignissen

Sei $\Omega \neq \emptyset$.
$\mathcal{P}(\Omega) := \{A \mid A \text{ Teilmenge von } \Omega\}$ sei die Potenzmenge von Ω.

Definition 1.1

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Algebra, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Sei $\Omega \neq \emptyset$.

Definition 1.2

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra, falls gilt:

(i) $\mathcal{F}$ ist eine Algebra

(ii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Beispiel 1.1

Eine Algebra ist nicht zwingend eine σ-Algebra.

Seien $\Omega = [0, \infty)$
$\mathcal{A} = \{[a, b) | 0 \leq a < b < \infty\} \cup \{[a, \infty) | 0 \leq a < \infty\}$
$\mathcal{B} = \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k | n \in \mathbb{N}, A_k \in \mathcal{A}\}$

Dann gilt:
a) $\mathcal{A}$ ist keine Algebra (->(iii))
b) $\mathcal{B}$ ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra

Beweis von b)

Es ist klar, dass $\mathcal{B}$ eine Algebra ist.
Sei nun $A_n = [0, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ für $n = 1, 2, \dots$
Dann gilt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\} \notin \mathcal{B}$$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist keine σ-Algebra.

Beispiel 1.2

Mengensysteme, die abgeschlossen sind bzgl. Vereinigung und Schnitten, müssen es nicht bzgl. Komplementbildung sein.

Seien $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \{(x, \infty) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
$u := x \wedge y := min\{x, y\}, v := x \vee y := max\{x, y\}$

$(x, \infty) \cup (y, \infty) = (u, \infty) \in \mathcal{A}$
$(x, \infty) \cap (y, \infty) = (v, \infty) \in \mathcal{A}$

Aber: $(x, \infty)^c = (-\infty, x] \notin \mathcal{A}$

Der Schnitt zweier σ-Algebren ist selbst eine.

Beweis.

Seien Σ_1, Σ_2 zwei σ-Algebren. $(*)$
$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 := \{A \cap B | A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$

(i) $\Omega = \Omega \cap \Omega \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

(ii) Sei $A \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Rightarrow A \in \Sigma_1, A \in \Sigma_2 \overset{(*)}{\Rightarrow} A^c \in \Sigma_1$, $A^c \in \Sigma_2 \Rightarrow A^c \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

(iii) Seien $A, B \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Rightarrow A, B \in \Sigma_1$ und $A, B \in \Sigma_2 \overset{(*)}{\Rightarrow} A \cup B \in \Sigma_1$ und $A \cup B \in \Sigma_2 \Rightarrow A \cup B \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

(iv) Seien $A_1, A_2, ... \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Rightarrow A_1, A_2, ... \in \Sigma_1$ und $A_1, A_2, ... \in \Sigma_2 \overset{(*)}{\Rightarrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma_1, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma_2 \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

Beispiel 1.3

Die Vereinigung von σ-Algebren ist i.A. keine σ-Algebra.

Sei $\Omega = \{a, b, c\}$
$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra
$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra

$\Rightarrow \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ ist auch eine σ-Algebra (triviale σ-Algebra)
Allerdings gilt: $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \Omega\}$ ist offensichtlich keine σ-Algebra.

Sei Ω eine beliebige Menge.

Definition 1.3

$\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt eine Semi-Algebra, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{J}$

(ii) $\emptyset \in \mathcal{J}$

(iii) $A, B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}$

(iv) $\forall A \in \mathcal{J} : A^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$
wobei $A_k \in \mathcal{J}$ $\forall k$ und A_k paarweise disjunkte Mengen

Beispiel 1.4

Semi-Algebren, die keine Algebren sind.

(i) Sei $\Omega = [-\infty, \infty)$ und
$\mathcal{J} = \{\emptyset, \Omega\} \cup \{[a, b) | -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$
$\Rightarrow \mathcal{J}$ ist eine Semi-Algebra, jedoch keine Algebra, weil:
$[a, b)^c = [-\infty, a) \cup [b, \infty) \notin \mathcal{J}$

(ii) Sei nun $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{J} = \{A \cap B | A \subset \Omega$ abg., $B \subset \Omega$ offen$\}$
$\Rightarrow \mathcal{J}$ ist eine Semi-Algebra, aber keine Algebra.

Definition 1.4

$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt ein Dynkin-System, falls:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A, B \in \mathcal{D}, A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{D}$

(iii) $A_k \in \mathcal{D}\ \forall k = 1, 2, \ldots$ und $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$

Beispiel 1.5

Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System.Die Umkehrung gilt nicht im Allgemeinen.

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}\}, n \in \mathbb{N}$
Definiere $D_e = \{D \in \mathcal{P}(\Omega) | |D| = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.
Dann ist D_e offensichtlich ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra, da:

Für $n > 1, A = \{\omega_1, \omega_2\} \in D_e$ und $B = \{\omega_2, \omega_3\} \in D_e$ gilt:
$A \cap B = \{\omega_2\} \notin D_e$

Unabhängigkeit von Zufallsereignissen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Abkürzung: $AB := A \cap B$

Definition 2.1

(i) Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls $P(AB) = P(A)P(B)$

(ii) Mengensysteme $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen unabhängig, falls: $P(AB) = P(A)P(B), \forall A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$

Definition 2.1

(iii) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$ heißen gemeinsam unabhängig, falls:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) ... P(A_{i_k})$$
$$(\forall k = 2, ...n \text{ und } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n)$$

Falls die obige Formel nur für k=2 gilt, dann heißen $A_1, ..., A_n$ paarweise unabhängig.

Beispiel 2.1

Die Unabhängigkeit von Ereignissen ist wiederum abhängig von den Wahrscheinlichkeiten.

Bsp: Dreimaliger Münzwurf

Sei K={Kopf}, Z={Zahl} mit:
$P(K) = p, P(Z) = 1 - p, \quad p \in [0, 1]$
A :={höchstens einmal Zahl}={KKK,KKZ,KZK,ZKK}
B :={jeder Wurf ist gleich}={KKK,ZZZ}

$\Rightarrow P(A) = p^3 + 3p^2(1-p), P(B) = p^3 + (1-p)^3$ und $P(AB) = p^3$

$\Rightarrow A, B$ unabhängig nur für $p \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Beispiel 2.2

Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht gemeinsame Unabhängigkeit.

(i) 16 Kapseln in einer Urne
Je 3 beschriftet mit: 111,100,010,001
Je 1 mit: 110,101,011,000
$\rightarrow$ Zufälliges Ziehen einer Kapsel

Definiere $A_j =$ {1 an j.ter Stelle} für $j = 1, 2, 3$. Dann gilt
$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$
$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ paarweise unabhängig

Aber: $P(A_1A_2A_3) = \frac{3}{16} \neq (\frac{1}{2})^3 = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

(ii) (Bernstein,1928)
Box mit 4 Tickets (112,121,211,222)
Zufälliges Ziehen eines Tickets.
A_1 ={1 an erster Stelle}
A_2 ={1 an zweiter Stelle}
A_3 ={1 an dritter Stelle}

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$
$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$
d.h. es folgt die paarweise Unabhängigkeit.

Wiederum:$P(A_1 A_2 A_3) = 0 \neq (\frac{1}{2})^3 = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Beispiel 2.3

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ gem. Unabhängigkeit.

(i) Sei $\Omega = \{(i,j)|i,j = 1,...,6\}$
Dann: $P(\omega) = \frac{1}{36}\ \forall \omega \in \Omega$

$A =$\{erste Ziffer 1,2 oder 3\}
$B =$\{erste Ziffer 3,4 oder 5\}
$C =$\{Summe der beiden Ziffern ist 9\}

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{9}$

$P(ABC) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{9} = P(A)P(B)P(C)$

A,B,C sind aber nicht gemeinsam unabhängig,weil:

$$P(AB) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$
$$P(AC) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = P(A)P(C)$$
$$P(BC) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = P(B)P(C)$$

(ii) Sei $\Omega = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} A_3 \dot{\cup} A_4 \dot{\cup} A_5$ mit:
$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{15}{64}$
$P(A_4) = \frac{1}{64}, P(A_5) = \frac{18}{64}$

$B := A_1 \cup A_4, C := A_2 \cup A_4, D := A_3 \cup A_4$
$\Rightarrow P(BCD) = \frac{1}{64} = (\frac{1}{4})^3 = P(B)P(C)P(D)$

Allerdings: $P(BC) = P(A_4) = \frac{1}{64} \neq \frac{1}{16} = P(B)P(C)$
$\Rightarrow$ B,C,D nicht gemeinsam unabhängig.

Beispiel 2.4

Unabhängige Klassen von Mengen bilden nicht unbedingt unabhängige σ-Algebren.

Sei hierzu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit:
$\Omega = [0, 1], \mathcal{F}$ der Borelalgebra auf Ω und P das Lebesguemaß.

Seien $\mathcal{A} := \{A_{11}, A_{12}\}$ und $\mathcal{B} := \{A_2\}$ mit:
$A_{11} = [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
$A_{12} = [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1)$
$A_2 = [0, \frac{1}{2})$

Es folgt die Unabhängigkeit von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, da:

$P(A_{11}) = \frac{1}{2}$
$P(A_{12}) = \frac{2}{3}$
$P(A_2) = \frac{1}{2}$
$P(A_{11}A_2) = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 = P(A_{11})P(A_2)$
$P(A_{12}A_2) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = P(A_{12})P(A_2)$

Sei $A_1 := A_{11}A_{12}$
Dann gilt: $P(A_1) = \frac{1}{3}$ und $A_1A_2 = [0, \frac{1}{4})$

Also: $P(A_1A_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}\frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)$
$\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B})$ sind abhängig.