Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie Martingale in diskreter Zeit

Seminararbeit

in

Mathematik

Vorgelegt von
Alexander Nerlich
21.01.2013

Gutachter

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Grundlagen

Ziel dieser Seminararbeit soll es sein zahlreiche mathematische Resultate aus dem Gebiet der diskreten Martingale vorzustellen. Genauer gesagt werden wir zunächst einige Martingaleigenschaften, wie beispielsweise Beschränktheit und Dominiertheit, vorzustellen und anschließend mittels Beispielen aufzeigen, dass manche dieser Eigenschaften nicht hinreichend/notwendig für die Gültigkeit anderer Eigenschaften sind.
Anschließend werden wir einige Begriffe vorstellen die dem des Martingals sehr ähnlich sind und auch hier Gegenbeispiele geben, welche diese Begriffe voneinander abgrenzen.
Abschließend werden wir uns mit der Konvergenz von Martingalen befassen, Sätze zu diesem Thema vorstellen und interessante Beispiele für Martingale geben, welche lediglich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit konvergieren.

Doch bevor wir mit dem oben angesprochen beginnen, wollen wir an dieser Stelle 2 äußerst grundlegende Definition geben, die der Filtration und die des Martingals.

Sei hierzu (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 1.1. (Filtration) *Eine Folge von Sigma-Algebren $(\Sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ heißt Filtration, falls*

$$\Sigma_s \subset \Sigma_t \subset \Sigma \quad \forall\ s \leq t \tag{1}$$

gilt.

Bemerkung 1.2. *Sind beispielsweise X, Y Zufallsvariablen, welche über dem Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, Σ, P) definiert sind, so werden wir hier und im folgenden $X = Y$ schreiben, auch wenn lediglich $X \overset{f.s.}{=} Y$ gemeint ist. Dies ist sinnvoll, da beispielsweise die bedingte Erwartung, welche im folgenden sehr oft verwendet wird, eine Zufallsvariable ist, welche lediglich fast sicher eindeutig und nicht eindeutig bestimmt ist.*

Definition 1.3. (Martingal) *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ Martingal, falls die nachfolgenden 3 Eigenschaften gelten.*

i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist bezüglich* $(\Sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ *adaptiert, d.h. Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ist* X_n Σ_n*-messbar.*

ii) Es gilt $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

iii) Es gilt $\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) = X_m$ *für jedes* $m \leq n$.

Kapitel 2

Eigenschaften von Martingalen

In diesem Kapitel wollen wir einige Eigenschaften von Martingalen vorstellen und Beispiele geben, welche aufzeigen werden, dass manche dieser Eigenschaften nicht hinreichend/notwendig für die Gültigkeit anderer Eigenschaften sind.
Ferner werden wir noch einen Satz von Doob vorstellen und mittels eines Beispiels aufzeigen, dass man auf die Voraussetzungen des Satzes nicht verzichten kann, das heißt das die dort gegebene Gleichung im Allgemeinen nicht gilt.

Definition 2.1. (Beschränktheit, Dominiertheit) *Sei $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal. Dieses heißt, L^1-beschränkt, falls*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty \tag{1}$$

gilt und L^1-dominiert, falls

$$\mathbb{E} \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| < \infty \tag{2}$$

gilt.

Bemerkung 2.2. *Offensichtlich ist jedes L^1-dominierte Martingal auch L^1-beschränkt. Mit dem folgenden Beispiel wollen wir illustrieren, dass die Rückrichtung im Allgemeinen nicht gilt.*

Beispiel 2.3. *Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $P(\{n\}) := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Σ sei die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Betrachtet man die Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, mit $X_n(\omega) := (n+1)\mathbb{1}_{[n+1,\infty)}(\omega)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\Sigma_n := \sigma(\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, \{[n+1,\infty) \cap \mathbb{N}\})$, so gelten alle drei nachfolgenden Behauptungen.*

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ein Martingal ist.*

ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$.

iii) $\mathbb{E} \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| = \infty$.

Beweis. Zu i). Das der Prozess adaptiert bzgl. der gegebenen Filtration ist, ist trivial. Ferner wird sich die Tatsache, dass der Erwartungswert endlich ist aus Punkt ii) ergeben, womit wir lediglich die Martingaleigenschaft 1.3.iii) beweisen.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) \\
&\quad= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_n|\{j\})\mathbb{1}_{\{j\}}(\omega) + \mathbb{E}(X_n|[n,\infty)\cap\mathbb{N})\mathbb{1}_{[,n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&\quad= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{\{j\}})}{P(\{j\})}\mathbb{1}_{\{j\}}(\omega) + \frac{\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}})}{P([n,\infty)\cap\mathbb{N}))})\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&\quad= \frac{\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}})}{P([n,\infty)\cap\mathbb{N}))})\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)\frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[n+1,\infty)})}{P([n,\infty))}\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&= (n+1)\frac{n}{n+1}\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&= n\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&= X_{n-1}
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich, dass auch $\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) = X_m$ für jedes $m \leq n$ gilt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ somit ein Martingal ist.

Zu ii). Es gilt $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) = (n+1)P(X_n = n+1) = (n+1)P([n+1,\infty)) = 1$ womit ii) offensichtlich erfüllt ist.

Zu iii). Man überlegt sich leicht, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n = Id$ gilt wobei Id die Identität auf $\mathbb{N}$ bezeichne. Hieraus folgt nun, dass

$$\mathbb{E}(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \mathbb{E}Id = \sum_{k=1}^{\infty} kP(Id = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k+1} = \infty$$

gilt. □

Definition 2.4. **(Stoppzeit)** *Sei $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, so heißt eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ Stoppzeit bzgl. $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls*

$$\{\tau = n\} \in \Sigma_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

gilt. Ferner bezeichne hier und im Folgendem T die Menge aller beschränkte Stoppzeiten. (Natürlich ist die Gestalt von T abhängig von der jeweiligen Filtration. Und natürlich betrachten wir immer das T, welches durch die Filtration im jeweiligen Beispiel definiert ist.)

Bemerkung 2.5. *Sei $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal und sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $Y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ definiert. So gilt für die Bedinungen*

i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$,

ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|Y_n| < \infty$,

iii) $\sup_{\tau\in T} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ *und*

iv) $\sup_{\tau\in T} \mathbb{E}|Y_n| < \infty$

dass die ersten 3 Bedingungen zueinander äquivalent sind.

Nachfolgendes Beispiel soll zeigen, dass dies für die letzte Bedingung nicht der Fall ist.

Beispiel 2.6. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma_n := \sigma(\{\tau = 1\}, ..., \{\tau = n\})$, wobei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ eine beliebige Zufallsvariable ist, welche $P(\tau < \infty) = 1$ und $P(\tau > n) > 0$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ erfülle.(So ist τ offensichtlich eine beschränkte Stoppzeit.)*
Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge, welche $b_{n-1} - b_n = 0$ erfülle, falls $P(\tau = n) = 0$ gilt. Ferner sei die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, durch

$$X_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k-1} - b_k}{P(\tau = k)}\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}(\omega) + \frac{b_n}{P(\tau > n)}\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}(\omega) \tag{4}$$

definiert, wobei wir die Vereinbarung treffen, dass $\frac{b_{n-1}-b_n}{P(\tau=n)} = 0$ gilt, falls $P(\tau = n) = 0$ ist.

Fordern wir nun noch, dass ein $c > 0$ existiert, sodass $b_n \geq c$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, so gelten alle nachfolgenden Behauptungen.

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist ein Martingal.*

ii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *erfüllt 2.5.i)-iii).*

iii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *erfüllt 2.5.iv) nicht.*

Beweis. Zu i).Offensichtlich ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert. Ferner wird die Existenz des Erwartungswertes beim Beweis von ii) klar. Es bleibt also $\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) = X_{n-1}$ für beliebiges $n \geq 2$ zu zeigen.
Dies folgt daraus, dass

$$\int_{\{\tau=k\}} X_n - X_{n-1} dP = \int_{\{\tau=k\}} \frac{b_{n-1}-b_n}{P(\tau=n)} \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} + \frac{b_n}{P(\tau>n)} \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} - \frac{b_{n-1}}{P(\tau>n-1)} \mathbb{1}_{\{\tau>n-1\}} dP = 0 \tag{5}$$

für jedes $k = 1, ..., n-1$ und

$$\int_{\{\tau>n-1\}} X_n - X_{n-1} dP = \int_{\{\tau=n\}} \frac{b_{n-1}-b_n}{P(\tau=n)} dP + \int_{\{\tau>n\}} \frac{b_n}{P(\tau>n)} dP - \int_{\{\tau>n-1\}} \frac{b_{n-1}}{P(\tau>n-1)} dP = 0 \tag{6}$$

gilt. Denn da die Mengen $\{\tau = 1\}, ..., \{\tau = n-1\}, \{\tau > n-1\}$ die Sigma Algebra Σ_{n-1} erzeugen, disjunkt sind und die Vereinigung all dieser Mengen den Grundraum Ω ergeben, folgt mit (5) und (6), dass $\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) = X_{n-1}$ für beliebiges $n \geq 2$ gilt.
Somit ist der erste Punkt bewiesen und wir kommen zum Beweis von ii).

Zu ii). Wir zeigen, dass

$$\mathbb{E}|X_n| = b_0 \tag{7}$$

gilt, wodurch offensichtlich 2.5.i) erfüllt ist und wegen der Äquivalenz von 2.5.i)-iii) somit Behauptung ii) folgt.
Zum Beweis von (7).

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|X_n| \\
&= \mathbb{E}X_n \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k-1}-b_k}{P(\tau=k)} \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}(\omega) + \frac{b_n}{P(\tau>n)} \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}(\omega)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k-1}-b_k}{P(\tau=k)} P(\tau=k) + \frac{b_n}{P(\tau>n)} P(\tau>n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} - b_k + b_n \\
&= b_0
\end{aligned}$$

Zu iii). Für $Y_\tau := \frac{1}{\tau} \sum\limits_{k=1}^{\tau} X_k$ gilt offensichtlich

$$Y_\tau \geq \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{\tau-1} \frac{b_k}{P(\tau>k)} \mathbb{1}_{\{\tau>k\}} := \eta. \tag{8}$$

Ferner erfüllt η, dass

$$P\left(\eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{P(\tau>k)}\right) = P(\tau=n) \quad \forall\, n \geq 2 \tag{9}$$

gilt und aus der Analysis ist bekannt, dass für eine Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche positiv und monoton fallend ist

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}(a_{n-1}-a_n)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_j}{a_j}\right) \geq \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2^n-1}-a_{2^n}}{a_{2^n}}b_{2^n} \tag{10}$$

gilt. Für $a_n := P(\tau > n)$ ergibt sich nun insgesamt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_\tau| \\
&\quad\geq \mathbb{E}\eta \\
&\quad\geq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_j}{P(\tau>j)}P(\eta=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_j}{P(\tau>j)}) \\
&\quad= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_j}{P(\tau>j)}P(\eta=n) \\
&\quad= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}(P(\tau>n-1)-P(\tau>n))\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_j}{P(\tau>j)} \\
&\quad\geq \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(\tau>2^n-1)-P(\tau>2^n)}{P(\tau>2^n)}b_{2^n} \\
&\quad= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(\tau=2^n)}{P(\tau>2^n)}b_{2^n} \\
&\quad= \infty
\end{aligned}$$

gilt. Womit 2.5.iv) offensichtlich verletzt ist. □

Theorem 2.7. (Doob) *Sei $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal, τ eine beliebige Stoppzeit, sodass*

i) $\mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ *und*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\{\tau>n\}} X_n dP = 0$

erfüllt ist, so gilt, dass

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0 \tag{11}$$

ist.

Bemerkung 2.8. *Mit nachfolgendem Beispiel wollen wir zeigen, dass man auf die zweite Bedingung des vorangegangenen Satzes von Doob im Allgemeinen nicht verzichten kann.*

Beispiel 2.9. *Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, wobei $\eta_1 : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$, mit $\mathbb{E}\eta_1 = 0$ gelte.*
Betrachtet man hierzu die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, welche durch

- $X_0 := 0$, $\Sigma_0 := \{\emptyset, \Omega\}$,
- $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k \ \forall\, n \geq 1$ *und*
- $\Sigma_n := \sigma(\eta_1, ..., \eta_n) \ \forall\, n \geq 1$

definiert seien, so gilt für die Stoppzeit $\tau(\omega) := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_0}(X_n(\omega) = 1)$ und für $(X_n, \Sigma_n n \in \mathbb{N}_0)$ jede der nachfolgenden Behauptungen.

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *ist ein Martingal.*

ii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *erfüllt Bedinung 2.7.i).*

iii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *erfüllt Bedingung 2.7.ii) nicht.*

iv) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *erfüllt Bedinung (11) nicht.*

Beweis. Zu i). Die ersten beiden Martingaleigenschaften sind trivial, die letzte verifiziert man durch nachfolgende Überlegung.

$$\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) = \mathbb{E}(X_m|\Sigma_m) + \mathbb{E}(\eta_{m+1}|\Sigma_m) + ... + \mathbb{E}(\eta_n|\Sigma_m) = X_m + \mathbb{E}(\eta_{m+1}) + ... + \mathbb{E}(\eta_n) = X_m \quad \forall\ m \leq n$$

Somit wurden alle Eigenschaften eines Martingals gezeigt.
Zu ii). Es gilt $X_\tau = 1$ $f.s.$, womit offensichtlich $\mathbb{E}|X_\tau| = 1 < \infty$, also insbesondere 2.7.i) gilt.
Zu iii). Da $\mathbb{E}X_n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, folgt dass

$$0 = \int\limits_\Omega X_n dP = \int\limits_{\{\tau \leq n\}} X_n dP + \int\limits_{\{\tau > n\}} X_n dP \tag{12}$$

und somit, dass

$$-\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{\tau \leq n\}} X_n dP = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{\tau > n\}} X_n dP \tag{13}$$

gilt. Wir zeigen nun, dass der linke Ausdruck in (13) gegen -1 konvergiert, womit die Behaupttung folgt.

$$\begin{aligned}
-\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{\tau \leq n\}} X_n dP & \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{\tau \leq n\}} X_\tau + \eta_{\tau+1} + ... + \eta_n dP \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{\tau \leq n\}} 1 dP - \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{\tau \leq n\}} \eta_{\tau+1} + ... + \eta_n dP \\
&= -\lim_{n\to\infty} P(\tau \leq n) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}((\eta_{\tau+1} + ... + \eta_n)\mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}) \\
&= -1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}((\eta_{k+1} + ... + \eta_n)\mathbb{1}_{\{k \leq n\}}|\tau = k)P(\tau = k) \\
&= -1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((\eta_{k+1} + ... + \eta_n)|\tau = k)P(\tau = k) \\
&= -1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((\eta_{k+1} + ... + \eta_n))P(\tau = k) \\
&= -1 \text{ ,da jedes } \eta_k \text{ den Erwartungswert 0 hat.}
\end{aligned}$$

Zu iv). Es gilt $X_\tau = 1$ $f.s.$, womit offensichtlich $\mathbb{E}X_\tau = 1 \neq 0 = \mathbb{E}X_0$ gilt und (11) somit verletzt ist. □

Kapitel 3

Martingalähnliche Begriffe und Beziehungen zwischen Diesen

In diesem Kapitel wollen einigee Begriffe vorstellen welche alle mit dem des Martingals verwandt sind. Darüberhinaus werden wir konkrete Beispiele geben die aufzeigen, dass manche dieser Definition andere im Allgemeinen nicht implizieren.

Definition 3.1. (Quasimartingal, Amart) *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration bzgl. der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$*

i) Quasimartingal, falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n - \mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n)|) < \infty$ gilt, und

ii) amart, falls $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \tau_0 \in T :\ \forall\ \tau \in T,\ \tau \geq \tau_0 :\ |\mathbb{E}X_\tau - b| < \varepsilon$ für ein $b > 0$

gilt.

Bemerkung 3.2. *Es lässt sich zeigen, dass jedes Quasimartingal auch ein Amart ist. Nachfolgendes Beispiel soll zeigen, dass die Rückrichtung im Allgemeinem nicht gilt.*

Beispiel 3.3. *Sei die Folge von (konstanten) Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $X_n := \frac{(-1)^n}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert und sei ferner $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge beschränkter Zufallsvariablen, welche $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ erfüllt. So gilt für jede beliebige Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. der τ_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Stoppzeit ist, dass*

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Amart, aber

ii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ kein Quasimartingal

ist.

Beweis. Zu i). Da alle X_n konstante Zufallsvariablen sind, sind sie bzgl. jeder Sigma-Algebra messbar, folglich ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert.
Ferner gilt offensichtlich $\lim\limits_{n\to\infty} X_{\tau_n} \stackrel{f.s.}{=} 0$ und $|X_{\tau_n}| \leq 1$, womit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\tau_n} = 0 \tag{1}$$

folgt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ somit ein Amart ist.

Zu ii). Das $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ kein Quasimartingal ist, ergibt sich unmittelbar aus nachfolgender Überlegung.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n - \mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n)|) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = \infty$$

□

Definition 3.4. (Martingal im Grenzwert, Eventuelles Martingal) *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration bzgl. der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$*

i) Martingal im Grenzwert, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geq n} |\mathbb{E}(X_m|\Sigma_n) - X_n| \overset{f.s.}{=} 0$ gilt, und

ii) eventuelles Martingal, falls $P(\mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n) \neq X_n \text{ u.o.}) = 0$

gilt. (Wobei die Abkürzung „u.o.“ hierbei für „unendlich oft“ steht.)

Beispiel 3.5. (Martingale im Grenzwert sind nicht notwendigerweise eventuelle Martingale) *Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $P(\eta_n = 1) = \frac{1}{n^2} = 1 - P(\eta_n = 0)$ für jedes $n \geq 1$ erfüllen. Definiert man die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $X_n := \eta_1 + ... + \eta_n$ für jedes $n \geq 1$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\Sigma_n := \sigma(\eta_1, ..., \eta_n)$ für jedes $n \geq 1$ so gelten nachfolgende Behauptungen.*

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist ein Martingal im Grenzwert, aber

ii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist kein eventuelles Martingal.

Beweis. Zu i). Trivialerweise ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ X_n bzgl. Σ_n messbar, womit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist.
Ferner folgt für $n \geq m$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) - X_m \\
&\quad= \mathbb{E}(\eta_1 + ... + \eta_m|\Sigma_m) + \mathbb{E}(\eta_{m+1} + ... + \eta_n|\Sigma_m) - X_m \\
&\quad= \eta_1 + ... + \eta_m + \mathbb{E}(\eta_{m+1} + ... + \eta_n) - X_m \\
&\quad= \mathbb{E}(\eta_{m+1} + ... + \eta_n) \\
&\quad= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

gilt und sich somit

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} |\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) - X_m| = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} = 0 \tag{2}$$

ergibt, womit $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal im Grenzwert ist.
Zu ii). Mittels dem Beweis von i) verifiziert man unmittelbar, dass

$$\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) = X_{n-1} + \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n \geq 2 \tag{3}$$

gilt, wodurch offensichtlich

$$\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) \neq X_{n-1} \quad \forall\, n \geq 2 \tag{4}$$

gilt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ per Definition somit kein eventuelles Martingal sein kann. □

Definition 3.6. (Progressives Martingal) *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration bzgl. der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ progressives Martingal, falls für $A_n := \{\mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n) = X_n\},\ n \in \mathbb{N}$,*

$$A_n \subset A_{n+1} \quad \forall\, n \geq 1 \text{ und } P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 \tag{5}$$

gilt.

Beispiel 3.7. (Progressives Martingales ist im Allgemeinen kein Quasimartingal) *Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $P(\zeta_n = 1) = \frac{n}{n+1} = 1 - P(\zeta_n = 0)$ erfüllen. Ferner sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, wobei $\eta_1 = 1$ und für jedes $n \geq 2$ $\eta_n = (-1)^{n-1}\zeta_1...\zeta_{n-1}$ gelte. So gilt für die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $X_n := \eta_1 + ... + \eta_n$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch $\Sigma_n := \sigma(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ definiert ist, dass die nachfolgenden 3 Behauptungen erfüllt sind.*

i) $P(\zeta_n = 0 \ u.o.) = 1$

ii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist ein progressives Martingal.*

iii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist kein Quasimartingal.*

Beweis. Zu i). Da

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(\zeta_n = 0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 - \frac{n}{n+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = \infty$$

gilt, folgt die Gültigkeit von i) unmittelbar aus dem Lemma von Borel-Cantelli.
Zu ii). Die Adaptiertheit ergibt sich sofort aus der Messbarkeit von X_n bzgl. Σ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Ferner ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ X_{n+1} auch Σ_n-messbar, wodurch $\mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n) = X_{n+1}$ gilt. Des Weiteren gilt $X_{n+1} = X_n$ genau dann wenn $\eta_{n+1} = 0$ gilt und aus $\eta_n = 0$ folgt, dass $\eta_{n+1} = 0$ gilt. Aus diesen Aussagen folgt nun, dass

$$\{X_{n+1} = X_n\} = \{\mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n) = X_n\} \subset \{\mathbb{E}(X_{n+2}|\Sigma_{n+1}) = X_{n+1}\} = \{X_{n+2} = X_{n+1}\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

gilt.
Ferner folgt aus i), dass $P(\eta_n \neq 0 \ u.o.) = 0$ gilt, woraus nun insgesamt

$$P(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n) = X_n\}) = P(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{X_{n+1} = X_n\}) = P(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\eta_{n+1} = 0\}) = 1 \tag{7}$$

folgt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ somit ein progressives Martingal ist.
Zu iii). Aus der Tatsache, dass

$$\mathbb{E}|\eta_n| = \mathbb{E}(\zeta_1 ... \zeta_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq 2 \tag{8}$$

gilt, folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n - \mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n - X_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\eta_{n+1}| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \tag{9}$$

gilt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ somit per Definition kein Quasimartingal ist. □

Beispiel 3.8. (Ein Progressives Martingal ist im Allgemeinen kein Amart) *Sei wie im vorangegangenen Beispiel* $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche* $P(\zeta_n = 1) = \frac{n}{n+1} = 1 - P(\zeta_n = 0)$ *erfüllen. Ferner sei nun die Folge* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *durch* $X_n := n^2\zeta_1...\zeta_{n-1}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *definiert. Betrachtet man nun die Filtration* $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, mit* $\Sigma_n = \sigma(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *so gelten die nachfolgenden 2 Behauptungen.*

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist ein progressives Martingal, aber*

ii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist kein Amart.*

Beweis. Zu i). Da für jedes $n \geq 2$ X_n bzgl. Σ_{n-1} messbar ist, gilt $\mathbb{E}(X_{n-1}|\Sigma_n) = X_n = \frac{n^2}{(n-1)^2}\zeta_{n-1}X_{n-1}$.Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass aus $X_{n-1} = 0$ $X_n = 0$ folgt. Ferner gilt wie im vorangegangenen Beispiel gezeigt, dass $P(\zeta_n = 0 \ u.o.) = 1$ gilt, woraus nun folgt, dass $P(X_n \neq \ 0 u.o.) = 0$ gilt.
Analog zum vorangegangen Beispiel ergibt sich nun aus all diesen Eigenschaften, dass $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein progressives Martingal ist.
Zu ii). Das $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ kein Amart ist, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \lim_{n\to\infty} n^2\mathbb{E}(\zeta_1...\zeta_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} n^2 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \tag{10}$$

gilt. □

Definition 3.9. (Ein Spiel welches mit der Zeit fairer ist) *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration bzgl. der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Spiel fairer mit Zeit, falls*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |\mathbb{E}(X_m|\Sigma_n) - X_n| \overset{P}{=} 0 \tag{11}$$

gilt.

Beispiel 3.10. (Ein eventuelles Martingal ist im Allgemeinen kein Spiel welches mit der Zeit fairer ist) *Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $P(\zeta_n = -1) = \frac{1}{2^n} = 1 - P(\zeta_n = 1)$ für jedes $n \geq 1$ genügen. Ferner sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\eta_1 := \zeta_1$ und durch $\eta_{n+1} := 2^n\zeta_{n+1}\mathbb{1}\{\zeta_n = -1\}$ für jedes $n \geq 1$ definiert. Betrachtet man nun die Folge von Zufallsvariabeln $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $X_n = \eta_1 + ... + \eta_n$ und $\Sigma_n = \sigma(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ gelte, so erfüllt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ die nachfolgenden Bedingungen.*

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist ein eventuelles Martingal, aber*

ii) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist kein Spiel welches mit der Zeit fairer ist.*

Beweis. Zu i). Zunächst gilt für jedes $k \geq 2$, dass

$$\mathbb{E}(\eta_k|\Sigma_{k-1}) = \mathbb{E}(2^{k-1}\zeta_k\mathbb{1}\{\zeta_{k-1} = -1\}|\Sigma_{k-1}) = 2^{k-1}\mathbb{E}(\zeta_k)\mathbb{1}\{\zeta_{k-1} = -1\} = (2^{k-1} - 1)\mathbb{1}\{\zeta_{k-1} = -1\} \tag{12}$$

ist, woraus sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} P(\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) \neq X_{n-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(\mathbb{E}(\eta_1|\Sigma_{n-1}) + ... + \mathbb{E}(\eta_{n-1}|\Sigma_{n-1}) + \mathbb{E}(\eta_n|\Sigma_{n-1}) \neq X_{n-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(\eta_1 + ... + \eta_{n-1} + (2^{n-1} - 1)\mathbb{1}\{\zeta_{n-1} = -1\} \neq X_{n-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P((2^{n-1} - 1)\mathbb{1}\{\zeta_{n-1} = -1\} \neq 0) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(\zeta_{n-1} = -1) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-k+1} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ergibt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ somit nach dem Lemma von Borel-Cantelli ein eventuelles Martingal ist.
Zu ii). Zunächst gilt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_{2m}|\Sigma_m) - X_m \\
&= \mathbb{E}(X_{2m} - X_m|\Sigma_m) \\
&= \mathbb{E}(\eta_{m+1} + ... + \eta_{2m}|\Sigma_m) \\
&= \mathbb{E}(\eta_{m+1}|\Sigma_m) + \sum_{k=m+2}^{2m} \mathbb{E}(\eta_k|\Sigma_m) \\
&= (2^m - 1)\mathbb{1}\{\zeta_m = -1\} + \sum_{k=m+2}^{2m} \mathbb{E}(\eta_k) \\
&= (2^m - 1)\mathbb{1}\{\zeta_m = -1\} + \sum_{k=m+2}^{2m} 2^{k-1}\mathbb{E}(\zeta_k)\mathbb{E}(\mathbb{1}\{\zeta_{k-1} = -1\}) \\
&= (2^m - 1)\mathbb{1}\{\zeta_m = -1\} + \sum_{k=m+2}^{2m} 2^{k-1}(-2^{-k} + 1 - 2^{-k})P(\zeta_{k-1} = -1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2^m - 1)\mathbb{1}\{\zeta_m = -1\} + \sum_{k=m+2}^{2m} (2^{k-1} - 1) P(\zeta_{k-1} = -1) \\
&= (2^m - 1)\mathbb{1}\{\zeta_m = -1\} + \sum_{k=m+2}^{2m} (1 - 2^{-k+1}) \\
&\geq \sum_{k=m+2}^{2m} (1 - 2^{-k+1}) \\
&> 1 - 2^{-2m+1} \\
&> \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ist, wodurch für jedes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$

$$P(|\mathbb{E}(X_{2m}|\Sigma_m) - X_m| > \varepsilon) = 1 \tag{13}$$

gilt. Aus der Definition der stochastischen Konvergenz und der des Spiels fairer mit Zeit folgt, dass $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ offensichtlich kein Spiel fairer mit Zeit ist. $\square$

Kapitel 4

Weitere Martingaleigenschaften und Konvergenz von Martingalen

In diesem letzten Kapitel wollen wir nun zunächst eine Martingalungleichung angeben und mittels eines Beispiels aufzeigen, dass einige der Voraussetzungen für die Gültigkeit der Ungleichung nötig sind. Anschließend werden wir einige interessante Beispiele über die Konvergenz von Martingalen vorstellen. Hierbei meint Konvergenz von Martingalen, dass man eine Folge von Zufallsvariablen hat, welche bezüglich einer gegebenen Filtration ein Martingal ist und, dass die Folge selbst in einem gewissen Sinne (beispielsweise stochastisch, oder fast sicher) konvergiert.

Theorem 4.1. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, sodass $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist. Ferner sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, sodass*

i) $g(x) > 0$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}_+$,

ii) $g(x) = g(-x)$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *und*

iii) *g ist konvex, das heißt* $g(\alpha x + (1-\alpha)y)) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}\ \forall\ \alpha \in [0,1]$

gilt, so erfüllt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nachfolgende Ungleichung.

$$P(\sup_{0<k\leq n} |X_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}g(X_n)}{g(\varepsilon)} \quad \forall\ \varepsilon > 0 \tag{1}$$

Bemerkung 4.2. *Mit nachfolgendem Beispiel wollen wir aufzeigen, dass die Konvexität von g aus dem vorangegangenem Theorem im Allgemeinen nötig ist.*

Beispiel 4.3. *Seien $a, h \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen und seien $\zeta_1,\ \zeta_2$ zueinander unabhängige Zufallsvariablen, welche $P(\zeta_1 = a) = P(\zeta_1 = -a) = \frac{1}{2}$ und $P(\zeta_2 = h) = P(\zeta_2 = -h) = \frac{1}{2}$ erfüllen. Ferner sei $(X_n, \Sigma_n, n = 1, 2)$ durch $X_1 := \zeta_1,\ X_2 := \zeta_1 + \zeta_2$ und durch $\Sigma_1 = \sigma(\zeta_1),\ \Sigma_2 = \sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ definiert. Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nun eine beliebige Funktion, welche 4.1.i),ii) genügt und 4.1.iii) für $\alpha = \frac{1}{2}$ verletzt, so ist die Ungleichung (1) für $\varepsilon = a$ verletzt.*

Beweis. Zunächst wollen wir bemerken, dass $(X_n, \Sigma_n, n = 1, 2)$ offensichtlich ein Martingal ist, da

$$\mathbb{E}(X_2|\Sigma_1) = \mathbb{E}(\zeta_1|\Sigma_1) + \mathbb{E}(\zeta_2|\Sigma_1) = \zeta_1 + \mathbb{E}(\zeta_2) = X_1 \tag{2}$$

gilt und auch die ersten beiden Martingaleigenschaften trivialerweise erfüllt sind.
Ferner gilt nun, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(g(X_2)) \\
&\quad = \frac{1}{4}(g(-a-h) + g(-a+h) + g(a-h) + g(a+h)) \\
&\quad = \frac{1}{2}(g(a+h) + g(a-h)) \\
&\quad < g(\frac{1}{2}(a+h+a-h)) \text{ ,denn g verletzt 4.1.iii) für } \alpha = \frac{1}{2} \\
&\quad = g(a)
\end{aligned}$$

und, dass

$$P(\sup_{1\leq k\leq 2}|X_k|\geq a)=1 \tag{3}$$

ist, womit sich insgesamt

$$P(\sup_{1\leq k\leq 2}|X_k|\geq a)>\frac{\mathbb{E}g(X_2)}{g(a)} \tag{4}$$

ergibt. □

Theorem 4.4. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, sodass $(X_n,\Sigma_n,n\in\mathbb{N})$ ein Submartingal ist, so gelten die nachfolgenden 2 Behauptungen.*

i) Ist $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}|X_n|<\infty$, so existiert eine Zufallsvariable X, sodass $\mathbb{E}|X|<\infty$ und $\lim_{n\to\infty}X_n\overset{f.s.}{=}X$ gilt.

ii) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so existiert eine Zufallsvariable X, sodass $\mathbb{E}|X|<\infty$, $\lim_{n\to\infty}X_n\overset{f.s.}{=}X$ und $\lim_{n\to\infty}X_n\overset{L^1}{=}X$ gilt.

Bemerkung 4.5. *Mit dem nachfolgenden Beispiel wollen wir aufzeigen, dass die Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}|X_n|<\infty$ nicht ausreicht, um die L^1-Konvergenz im Allgemeinen zu gewährleisten.*

Beispiel 4.6. *Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, sodass $P(\zeta_1=0)=P(\zeta_1=2)=\frac{1}{2}$ gilt. Definiert man die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $X_n:=\zeta_1...\zeta_n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\Sigma_n:=\sigma(\zeta_1,...,\zeta_n)$ für jedes $n\in\mathbb{N}$, so gelten die nachfolgenden Behauptungen.*

i) $(X_n,\Sigma_n,n\in\mathbb{N})$ ist ein Martingal. (Also insbesondere ein Submartingal.)

ii) $(X_n,\Sigma_n,n\in\mathbb{N})$ erfüllt die Bedingung von 4.4.i)

iii) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht im L^1-Sinne.

Beweis. Die Adaptiertheit von $(X_n,\Sigma_n,n\in\mathbb{N})$ ist trivial, die Endlichkeit des Erwartungswertes wird im Beweis von *ii)* offensichtlich. Die letzte Martingaleigenschaft gilt auch, da für jedes $m\geq n$

$$\mathbb{E}(X_m|\Sigma_n)=\zeta_1...\zeta_n\mathbb{E}(\zeta_{n+1}...\zeta_m|\Sigma_n)=X_n\mathbb{E}(\zeta_1)^{m-(n+1)}=X_n \tag{5}$$

gilt.
Zu ii). Offensichtlich gilt $\mathbb{E}|X_n|=1$ für jedes $n\in\mathbb{N}$, womit $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}|X_n|=1<\infty$ folgt.

Zu iii). Wir wissen nun, dass eine Zufallsvariable X existiert, mit $\lim_{n\to\infty}X_n\overset{f.s.}{=}X$. Aus $P(X_n=2^n)=2^{-n}$ und $P(X_n=0)=1-2^{-n}$ folgt nun, dass $X=0$ gelten muss. Aber wegen

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n-X|=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|=\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0 \tag{6}$$

konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in L^1 gegen X. □

Definition 4.7. (Regulär) *Ein Martingal $(X_n,\Sigma_n,n\in\mathbb{N})$ heißt regulär, falls eine Zufallsvariable ζ existiert, sodass*

$$X_n=\mathbb{E}(\zeta|\Sigma_n) \tag{7}$$

für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung 4.8. *Es lässt sich zeigen, dass jedes gleichgradig integrierbare Martingal auch regülar ist und, dass darüber hinaus, für die in obiger Definition betrachtete Zufallsvariable $\zeta\overset{f.s.}{=}\lim_{n\to\infty}X_n$ gilt, falls das Martingal gleichgradig integrierbar ist.*
Nachfolgendes Beispiel soll zeigen, dass ζ im Allgemeinen nicht Bedingung (7) erfüllt. (Ferner sei hierbei bemerkt, dass für ein Martingal, welches lediglich aus endlich vielen Zufallsvariablen besteht Bedingung (7) immer erfüllt ist.)

Beispiel 4.9. *Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und standartnormalverteilter Zufallsvariablen. Ferner sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $S_n := \eta_1 + ... + \eta_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert. Betrachtet man nun die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $X_n := \exp(S_n - \frac{1}{2}n)$, für jedes $n \in \mathbb{N}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\Sigma_n := \sigma(\eta_1, ..., \eta_n)$, für jedes $n \in \mathbb{N}$ so gelten alle nachfolgenden Behauptungnen.*

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist ein Martingal.*

ii) $\zeta := \lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$ *mit Wahrscheinlichkeit 1.*

iii) Es gilt $\mathbb{E}(\zeta|\Sigma_n) \neq X_n$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

gilt.

Beweis. Die Adaptiertheit ist trivial, die Existenz der Erwartungswerte ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}\left(\exp\left(\eta_1 + ... + \eta_n - \frac{1}{2}n\right)\right) = \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\eta_1\right)\right)\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}n\right) = \varphi(-i)^n \left(-\frac{1}{2}n\right) = 1$$

gilt, wobei φ die charakteristische Funktion einer standartnormalverteilten Zufallsvariable sei. Die letzte Martingaleigenschaft ergibt sich nun aus der Tatsache, dass für jedes $m \leq n$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) \\
&= \mathbb{E}\left(\exp\left(\eta_1 + ... + \eta_n - \frac{1}{2}n\right)|\Sigma_m\right) \\
&= \exp\left(\eta_1 + ... + \eta_m - \frac{1}{2}n\right)\mathbb{E}(\exp(\eta_{m+1} + ... + \eta_n)) \\
&= \exp\left(\eta_1 + ... + \eta_m - \frac{1}{2}n\right)(\mathbb{E}(\exp(\eta_1)))^{n-m} \\
&= \exp\left(\eta_1 + ... + \eta_m - \frac{1}{2}n\right)(\varphi(-i))^{n-m} \\
&= \exp\left(\eta_1 + ... + \eta_m - \frac{1}{2}n\right)\exp\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}m\right) \\
&= \exp\left(\eta_1 + ... + \eta_m - \frac{1}{2}m\right) \\
&= X_m
\end{aligned}$$

gilt.
Zu ii). Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen ergibt sich unmittelbar, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\zeta := \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n\left(\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{2}\right)\right) = 0 \tag{8}$$

gilt.
Zu iii). Nach ii) gilt nun $\mathbb{E}(\zeta|\Sigma_n) = 0 \neq X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ □

Bemerkung 4.10. *Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, so konvert die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ genau dann fast sicher, wenn sie stochastisch konvergiert. Die nachfolgenden 2 Beispiel sollen zeigen, dass dies für Martingale nicht der Fall ist.*

Beispiel 4.11. *Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $P(\zeta_n = 1) = P(\zeta_n = -1) = \frac{1}{2n}$ und $P(\zeta_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Betrachtet man nun die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $X_n = \zeta_n \mathbb{1}\{X_{n-1} = 0\} + nX_{n-1}|\zeta_n|\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, $X_0 := 0$ und $\Sigma_n := \sigma(\zeta_1, ..., \zeta n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte, so gelten alle nachfolgenden Behauptungen.*

i) $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist ein Martingal.*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \stackrel{P}{=} 0.$

iii) Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht fast sicher konvergent.

Beweis. Zu i). Sowohl die Adaptiertheit, als auch die Existenz der Erwartungswerte von X_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind trivial. Ferner folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(\zeta_n \mathbb{1}\{X_{n-1} = 0\} + nX_{n-1}|\zeta_n|\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}|\Sigma_{n-1}) \\
&= \mathbb{1}\{X_{n-1} = 0\}\mathbb{E}(\zeta_n) + nX_{n-1}\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}\mathbb{E}|\zeta_n| \\
&= nX_{n-1}\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}\frac{1}{n} \\
&= X_{n-1}\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\} \\
&= X_{n-1}
\end{aligned}$$

gilt, womit $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist.
Zu ii). Es gilt $P(X_n = 0) = P(\zeta_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, wodurch für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(|X_n| \leq \varepsilon) = 1 - \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 0 \tag{9}$$

gilt. Somit gilt auch für jedes $\varepsilon \geq 1$, dass

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0 \tag{10}$$

ist, womit sich insgesamt die stochastische Konvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null ergibt.
Zu iii). Zunächst gilt, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|\zeta_n| = 1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty \tag{11}$$

ist, woraus nach dem Lemma von Borel-Cantelli

$$P(\zeta_n \neq 0 \text{ } u.o.) = P(|\zeta_n| = 1 \text{ } u.o.) = 1 \tag{12}$$

folgt. Da wie in ii) erwähnt $P(X_n = 0) = P(\zeta_n = 0)$ gilt, gilt auch, dass $P(X_n \neq 0 \text{ } u.o.) = P(\zeta_n \neq 0 \text{ } u.o.)$ ist. Mittels (12) ergibt sich nun, dass

$$P(X_n \neq 0 \text{ } u.o.) = 1 \tag{13}$$

gilt. Letztere Gleichung impliziert aber offensichtlich, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast sicher gegen Null konvergieren kann, womit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast sicher konvergent ist. □

Beispiel 4.12. *Dieses etwas allgemeiner gehaltene Beispiel beruht auf nachfolgendem Satz.*
Sei $\Omega = [0, 1]$, $\Sigma = \mathfrak{B}([0, 1])$ und P das Lebesgue Maß auf (Ω, Σ), so lässt sich zeigen, dass für jede beliebige Folge von Zufallsvariablen $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nur endlich viele Werte annehmen, ein Martingal $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ exisitert, sodass

$$P(\zeta_n = X_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \textit{ hinreichend groß}) = 1 \tag{14}$$

gilt.
Da nun wie Allgemein bekannt ist Folgen von Zufallsvariablen exisitert welche stochastisch aber nicht fast sicher konvergieren und Folgen von Zufallsvariablen exisitieren welche beschränkt sind aber nicht konvergieren, gelten nach obigem Satz die nachfolgenden 2 Aussagen.

i) Es existiert ein Martingal $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$, sodass $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} 0$ und $P(\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0\}) = 0$ gilt.

ii) Es existiert ein Martingal $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$, sodass $P(\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}) = 1$ und $P(\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}) = 0$ gilt.

Bemerkung 4.13. *Nun wollen wir 2 Beispiele für Martingale geben, welche lediglich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit divergieren.*

Beispiel 4.14. *Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, welche $\mathbb{E}\zeta_1 = 0$ und $\mathbb{E}|\zeta_1| > 0$ genügen. Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $\mathbb{E}\eta_n = 0$ und $\mathbb{E}\eta_n^2 = \frac{1}{n^2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. So lässt sich zeigen, dass*

- *die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \zeta_n$ divergiert und*
- *die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta_n$ fast sicher konvergiert.*

Sei nun ferner $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine weitere Folge von Zufallsvariablen mit $P(X_0 = 1) = p = 1 - P(X_0 = -1)$ für ein $p \in [0,1]$ und $X_n := \zeta_n \mathbb{1}\{X_0 = 1\} + \eta_n \mathbb{1}\{X_0 = -1\}$ gegeben, wobei X_0, η_n, ζ_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zueinander unabhängig seien. So gilt für $(S_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$, wobei $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ und $\Sigma_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

i) $(S_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist und,

ii) dass $P((S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent$) = 1 - p$, $P((S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent$) = p$ gilt.

Beweis. Zu i). Offensichtlich ist jedes S_n bzgl. Σ_n messbar, woraus die Adaptiertheit folgt. Ferner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$S_n = \mathbb{1}\{X_0 = 1\} \sum_{k=1}^{n} \zeta_k + \mathbb{1}\{X_0 = -1\} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \tag{15}$$

ist, womit $\mathbb{E}|S_n| < \infty$ offensichtlich gilt. Ferner gilt für jedes $m \leq n$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(S_n|\Sigma_m) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}(X_k|\Sigma_m) + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{E}(X_k|\Sigma_m) \\
&= \sum_{k=1}^{m} X_k + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{E}(\zeta_k \mathbb{1}\{X_0 = 1\} + \eta_k \mathbb{1}\{X_0 = -1\}|\Sigma_m) \\
&= S_m + \sum_{k=m+1}^{n} (\mathbb{1}\{X_0 = 1\}\mathbb{E}(\zeta_k|\Sigma_m) + \mathbb{1}\{X_0 = -1\}\mathbb{E}(\eta_k|\Sigma_m)) \\
&= S_m + \sum_{k=m+1}^{n} (\mathbb{1}\{X_0 = 1\}\mathbb{E}(\zeta_k) + \mathbb{1}\{X_0 = -1\}\mathbb{E}(\eta_k)) \\
&= S_m
\end{aligned}$$

ist, womit $(S_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist.
Zu ii). Aus (15) folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mathbb{1}\{X_0 = 1\} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k + \mathbb{1}\{X_0 = -1\} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \tag{16}$$

ist, wobei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ divergiert und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k$ konvergiert. Hieraus folgt nun sofort, dass

- $P((S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent$) = P(X_0 = -1) = 1 - p$ und
- $P((S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent$) = P(X_0 = 1) = p$

gilt. □

Beispiel 4.15. *Sei $(W_t, t \geq 0)$ ein Wienerprozess und $(\Sigma_t, t \geq 0)$ dessen natürliche Filtration. Ferner sei $A \in \Sigma_1$, sodass $P(A) \in (0,1)$ gilt. Betrachtet man nun die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $X_n(\omega) := W_n(\omega)\mathbb{1}\{\omega \notin A\}$ definiert sei, so gilt* *i)* $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ *ist ein Martingal und*

ii) $P((X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent*$) = P(A)$

Beweis. Zu i). Da der Wiener Prozess bzgl. seiner natürlichen Filtration adaptiert ist, erfüllt auch $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ diese Eigenschaft. Ferner ist, da W_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ normalverteilt ist, $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Martingaleigenschaft, folgt aus der Tatsache, dass für jedes $m \leq n$

$$\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) = \mathbb{E}(W_n \mathbb{1}\{A^c\}|\Sigma_m) = \mathbb{1}\{A^c\}\mathbb{E}(W_n|\Sigma_m) = \mathbb{1}\{A^c\}W_m = X_m \tag{17}$$

gilt. Wobei hierbei die Tatsache genutzt wurde, dass der Wiener Prozess bzgl. seiner natürlichen Filtration ein Martingal ist.
Zu ii). Es ist allgemein bekannt, dass für den Wiener Prozess

$$P(\limsup_{n\to\infty} W_n = \infty) = P(\liminf_{n\to\infty} W_n = -\infty) = 1 \tag{18}$$

gilt. Hieraus folgt unmittelbar, dass

$$P((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}) = P(\mathbb{1}\{\omega \notin A\} = 0) = P(A) \tag{19}$$

gilt. □

Literaturverzeichnis

[1] Counterexamples in Probability, J. Stoyanov, Wiley 1997, Kapitel 22