Seminar Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Stochastik
Georg Schalaschov

Wintersemester 2012/2013

5. Februar 2013

1 Einfürung

Stochastische Prozesse finden zahlreiche Anwendungen in unterschiedlichen Gebieten der Wissenschaft und dem alltäglichem Leben.

Viele wissenschaftliche Gebiete sind heutzutage ohne stochastische Prozesse nicht denkbar, in erster Linie sind das Physik, Chemie, Biologie und Finanzmathematik.

Im Jahr 1827 hat Robert Brown im Mikroskop eine chaotische Bewegung beobachtet, die längere Zeit unerklärlich blieb. Erst am Anfang des 20. Jh wurde festgestellt, dass diese Bewegung mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen beschrieben werden kann. (Brownsche Bewegung oder Wienerprozess)

im Jahr 1909 hat Anger Erlang, dänischer Mathematiker und Ingenieur seine Arbeit "The theory of probability and telephone conversations" veröffentlicht. Die Anzahl der Abonnenten so wie die Dauer des Telefonates sind zufällig. Er stand ursprünglich vor dem Problem wie die Kapazität von Telefonnetzwerken unter dem Einfluss des doppelten Zufalls belegt werden sollen. (Ausweg: Poisson, Poissonartige Prozesse)

Finanzmathematik ist heute ohne den Begriff der Martingale unvorstellbar.

Der Begriff der stochastischen Prozesse kann auch auf hochdimensionale Räume übertragen und erweitert werden.

Mehr über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie kann man in [3] erfahren.

2 Allgemeine Theorie der stochastischen Prozessen

Bevor wir uns mit dem eigentlichen Seminarthema auseinandersetzen, führen wir die notwendigen Definitionen und Sätze ein.

Definition 2.1
Die Familie $\{X_t,\ t \in T\}$ von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \to E$, die über ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind, heißen im allgemeinen zufällige Funktionen.

- *Falls die Indexmenge T abzählbar ist, so nennt man $\{X_t,\ t \in T\}$* ***stochastischer Prozess in diskreter Zeit.***
- *Falls $T \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so nennt man $\{X_t,\ t \in T\}$* ***stochastischer Prozess in stetiger Zeit****. Auf Abb.1 sieht man eine mögliche Realisierung davon.*
- *Falls die Indexmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ nennt man eine solche zufällige Funktion* ***Zufallsfeld****.*

Definition 2.2 (Trajektorie bzw. Pfad)
Fixiert man $\omega_0 \in \Omega$ so nennt man die Menge $X_{\omega_0}(t) = \{X(t, \omega_0) :\ t \in T\}$ Trajektorie.

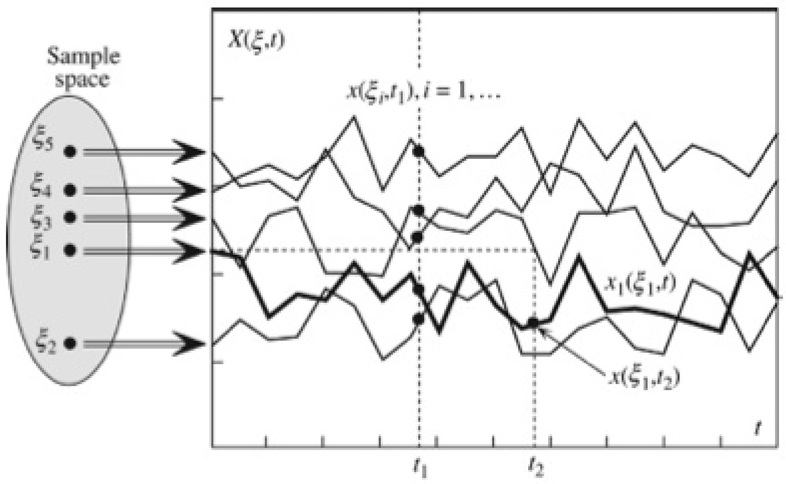

Abbildung 1: Realisierung der stochastischen Prozesse
Quelle: Venkatarama Krishnan "Probability and Random Processes"p. 407

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein fixierter Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t,\ t \in T \subset \mathbb{R}_+)$ ein stochastischer Prozess. Wir stellen uns die Frage, ob X auf diesen Wahrscheinlichkeitsraum definiert werden kann. Nach [2] ist bekannt, dass ein universaler Wahrscheinlichkeitsraum existiert auf dem alle mögliche Zufallsvariablen definiert sind. Gibt es auch einen Wahrscheinlichkeitsraum auf dem alle Zufallsprozesse definiert sind? Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 1
[8, S.210]

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Ω so wie $\mathcal{F}$ sind beliebig aber fix. Man wählt die Indexmenge T so, dass $Card(T) > Card(\mathcal{F})$ und konstruiert den folgenden Prozess: $X = (X_t,\ t \in T)$. X_t sind die unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_t = 0] = \mathbb{P}[X_t = 1] = \frac{1}{2}\ \forall t \in T$$

Für $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in T$, so sind die Ereignisse $[X_{t_1} = 1]$ und $[X_{t_2} = 1]$ sind ungleich, sonst sollte folgende Gleichung gelten:

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}[X_{t_1} = 1] = \mathbb{P}[X_{t_1} = 1, X_{t_2} = 1] \neq \mathbb{P}[X_{t_1} = 1]\mathbb{P}[X_{t_2} = 1] = \frac{1}{4}$$

Also $Card(\mathcal{F})$ muss mind. so groß wie $Card(T)$ sein, aber es widerspricht unseren Annahmen, da $\mathcal{F}$ beliebig war.

Definition 2.3 (endlich-dimensionale Verteilungen)
Sei $\{X_t,\ t \in T\}$ ein stochastischer Prozess und $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ gegeben, dann besitzen

die entsprechenden Zufallsvariablen $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ n-dim. als Verteilungsfunktion.

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1 \ldots, t_n) = \mathbb{P}(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n) = \mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}$$

Definition 2.4 (Modifikation)
Seien $\{X_t,\ t \in T\}$ und $\{Y_t,\ t \in T\}$ zwei stochastische Prozesse, definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X und Y heißen Modifikationen voneinander, falls $\forall t \in T$:

$$\mathbb{P}[\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)] = 0$$

Definition 2.5 (ununterscheidbare Prozesse)
X und Y heißen ununterscheidbar, falls es ein $N \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mathbb{P}[N] = 0$ und

$$\{X_t \neq Y_t\} \subset N \text{ für jedes } t \in T$$

Andererseits kann gezeigt werden, dass es stochastische Prozesse mit unterschiedlichen Trajektorienverläufe gibt, die trotzdem dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen. Betrachte z.B. das erste Beispiel aus meinem Vortrag oder [8, S. 213]

Meistens ist es sinnvoll, nur solche Modifikationen eines stochastischen Prozesses zu betrachten, bei denen $\{X_t,\ t \in D\}$, wobei D eine abzählbare Teilmenge von T ist.

Dies führt auf den Begriff des separablen stochastischen Prozesses, der von J.L. Doob eingeführt wurde.

Definition 2.6 (Separabler Prozess)
Sei $X = (X(t), t \in T \subset \mathbb{R})$ ein reellwertiger stochastischer Prozess. X heißt separabel, wenn die abzählbare Teilmenge $D \subset T$ existiert und ein Ereignis A mit $\mathbb{P}(A) = 0$ so, dass

$$\{\omega : X(t, \omega) \in B\ \forall t \in I \cap D\} \backslash \{\omega : X(t, \omega) \in B\ \forall t \in I\} \subset A$$

mit der abgeschlossenen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$ und der offenen Teilmenge $I \subset T$. Definition vergleiche [6].

Wenn X separabel ist, dann können alle Ereignisse von X durch eine abzählbare Vereinigung oder Schnittbildung dargestellt werden.

Allerdings sind nicht alle Prozesse separabel. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 2
Separable Eigenschaft der stochastischen Prozesse [8, S.213]

Sei $\tau \sim \mathcal{U}[0,1]$ eine Zufallsvariable. Wir konstruieren einen Prozess $X = (X(t), t \in [0,1])$ wie folgt:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \tau(\omega) = t \\ 0, & \tau(\omega) \neq t \end{cases}$$

Wenn D eine abzählbare Teilmenge von $[0,1]$ ist, dann gilt:

$\mathbb{P}[X(t) = 0 \text{ für } \forall t \in D] = 1$, $\mathbb{P}[X(t) = 0 \text{ für } \forall t \in [0,1]] = 0$. *Also der Prozess X(t) ist nicht separabel.*

In den folgenden drei Definitionen werden wir unterschiedliche Arten der Stetigkeit der stochastischen Prozesse kennenlernen. Dabei gelten folgende Notationen: $X = \{X_t, t \in T\}$ ist ein stochastischer Prozess und T ist ein topologischer Raum.

Definition 2.7 (stochastisch stetig)
Der stochastische Prozess X heißt stochastisch stetig auf T, falls $X(s) \xrightarrow[s \to t]{P} X(t)$, für beliebige $t \in T$, d.h.

$$\mathbb{P}(|X(s) - X(t)| > \epsilon) \xrightarrow[s \to t]{} 0, \forall \epsilon > 0.$$

Definition 2.8 (L^p-stetig)
X heißt L^p-stetig auf T, $p \geq 1$, falls $X(s) \xrightarrow[s \to t]{L^p} X(t), t \in T$, d.h. $\mathbb{E}|X(s) - X(t)|^p \xrightarrow[s \to t]{} 0$

Definition 2.9 (f.s. stetig)
$X = \{X_t, t \in T\}$ heißt auf T f.s. stetig, falls $X(s) \xrightarrow[s \to t]{f.s.} X(t)$, $t \in T$, d.h.

$\mathbb{P}(X(s) \xrightarrow[s \to t]{} X(t)) = 1, t \in T$

Satz 1 (Bedingung von Kolmogorov)
vgl.[6, Theorem 1.3.1]

Sei $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$, $-\infty < a < b < \infty$ ein reellwertiger stochastischer Prozess. X besitzt eine stetige Modifikation, falls es die Konstanten c, α, $\gamma > 0$ s.d. für alle $s, t \in (a,b)$ die Ungleichung:

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq c|t-s|^{1+\gamma} \tag{1}$$

erfüllt ist.

Es stellt sich die Frage, ob die Bedingung von Kolmogorov hinreichend und notwendig für die f.s. Stetigkeit ist. Folgendes Beispiel gibt die Antwort auf diese Frage.

Beispiel 3
f.s. stetig & die Bedingung von Kolmogorov[8, S.219]

- *Betrachten wir zuerst einen Poissonprozess, der wie folgt definiert ist: $N = \{N(t), t \geq 0\}$*
  - $N(0) = 0$
  - *Poissonprozess besitzt unabhängige Zuwächse*
  - $N(t+s) - N(s) \sim Pois(\lambda t)$

– $\mathbb{P}(N(t+s)-N(s)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

Sei o.B.d.A. $t>s$*, dann ist die Zufallsvariable* $Z=X_t-X_s$ *~*$Poi(\lambda(t-s))$*. Da*

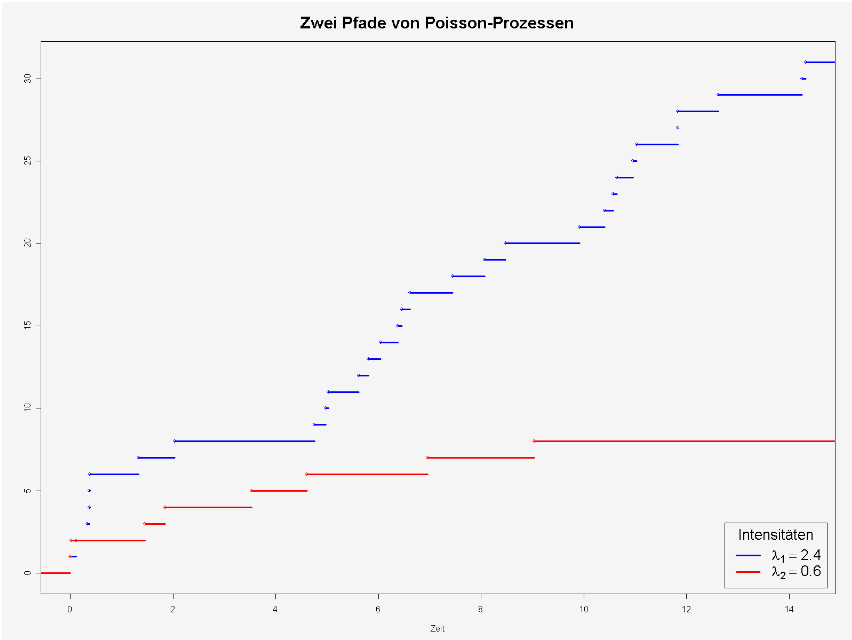

Abbildung 2: zwei mögliche Realisierungen für Poissonprozesse
Quelle:www.wikipedia.de

der Poissonprozess nur ganzzahlige Werte annimmt, genügt es den Fall $\alpha\geq 1$ *zu betrachten; mit Hilfe der Ungleichung von Jensen ergibt sich* $\mathbb{E}(Z^\alpha)\geq(\lambda|t-s|)^\alpha$*, was für alle hinreichend kleinen Werte von t-s einen Widerspruch zu 1 liefert Alle Trajektorien eines Poissionprozesses, wie bereits bekannt, sind unstetig, also nicht f.s. stetig, eine mögliche Realisierung kann man in der Abb. 2 sehen.*

- *Als nächstes betrachten wir einen Wiener Prozess* $W=(W(t),t\geq 0)$*. Der wie folgt definiert ist:*
  - $W(0)=0$
  - *die Zuwächse von* W *sind unabhängig und* $W(t-s)$*~*$N(0,|t-s|)$
  - *Cov(W(s),W(t))=min{s,t}*

Wir nehmen wieder an, o.B.d.A., dass $t>s$ *ist, dann ist die Zufallsvariable* $W(t)-W(s)$*~*$N(0,t-s)$ *verteilt. Die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung mit der Varianz* $(t-s)$ *sieht wie folgt aus:* $m_{W_t-W_s}(z)=e(\frac{(t-s)^2z^2}{2})$*, also* $\mu^1=m_{W_t-W_s}(0)=0$*, da* $\frac{\mathrm{d}m_{W_t-W_s}}{\mathrm{d}z}|_{z=0}=z(t-s)^2exp(\frac{(t-s)^2z^2}{2})|_{z=0}=(t-s)^2$

$\mu^2 = \frac{\mathrm{d}^2 m_{W_t - W_s}}{\mathrm{d}z^2} = (t-s)^2 exp(\frac{(t-s)^2 z^2}{2}) + \underbrace{z^2(t-s)^2 z(t-s)^2 exp(\frac{(t-s)^2 z^2}{2})}_{=0} |_{z=0} = (t-s)^2$

Für $\alpha = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{E}(W_t - W_s)^\alpha$ gleich Null und für $\alpha = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ $\mu^\alpha = (t-s)^\alpha(\alpha-1)!!$ mit $(\alpha-1)!! = (\alpha-1)(\alpha-3)\cdot\ldots 3\cdot 1$, dazu siehe z.B. [1]

Also $\mathbb{E}(W_t - W_s)^\alpha$ lässt sich nach unten abschätzen durch $c(t-s)^{1+\gamma}$ und daraus folgt, dass der Wienerprozess eine f.s. stetige Modifikation besitzt.

- *Mit Hilfe von $W = (W(t), t \geq 0)$ konstruieren wir einen $f.s.$ stetigen Prozess, welcher die Bedingung (1) nicht erfüllt. Sei $Y = (Y(t), t \geq 0)$ mit $Y_t = exp(W_t^3)$ gegeben. Dieser Prozess als Komposition stetiger Funktionen ist wieder $f.s.$ stetig. Aber $\forall \alpha > 0$ ist $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] = \infty$. Bereits für $t = 1$ folgt $\mathbb{E}(exp(W_1^3)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^3} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty e^{x^3 - \frac{x^2}{2}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty e^{\frac{x^3}{2}} dx = \infty$*

Aus diesen Beispielen lernen wir, dass es auch $f.s.$ stetige Prozesse gibt, für die die Bedingung von Kolmogorov nicht erfüllt ist. Also diese Bedingung ist nicht notwendig.

3 Markov-Prozesse

Definition 3.1 (Markov-Prozess in diskreter Zeit)
Ein stochastischer Prozess $\{X_0, X_1, \dots\}$ in diskreter Zeit und mit dem abzählbaren Zustandsraum E heißt Markovkette, wenn für jedes beliebige $n = 1, 2, \dots$ und jede beliebige Folge $i_0, i_1, \dots, i_{n+1}$ mit $i_k \in E$ folgende Beziehung gilt:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

Definition 3.2 (Übergangswahrscheinlichkeit)
Die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i);\ n = 0, 1, \dots,;\ i, j \in E$$

sind die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette.

Definition 3.3 (homogene Markovkette)
Eine Markovkette heißt homogen, wenn ihre Übergangswahrscheinlichkeiten nicht vom Zeitpunkt n abhängen:

$$p_{ij}(n) = p_{ij}$$

Übergangswahrscheinlichkeiten werden in der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten P zusammengefasst: $P = (p_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$

$p_{i,j}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Markovkette in einer Zeiteinheit (in einem Schritt, bei einem Sprung) vom Zustand i in den Zustand j übergeht. Mit der Wahrscheinlichkeit p_{ii} besteht die Möglichkeit, dass die Markovkette eine weitere Zeiteinheit im Zustand i verbleibt. Es gilt stets:

$$p_{ij} \geq 0;\ i,j = 0,1,\ldots;\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{ij} = 1,\ i \in \mathbb{Z}$$

Definition 3.4 (mehrstufige Überganswahrscheinlichkeiten)

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i);\ m = 1,2,\ldots$$

$p_{ij}^{(m)}$ *ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Markovkette, ausgehend vom Zustand* i *in einem beliebigen Zeitpunkt* $t = n$*, nach* m *Zeiteinheiten im Zustand* j *befinden.*

Definition 3.5 (stationäre Verteilung)
Eine Verteilung π *heißt stationär (bezüglich Markovkette), falls* $\pi P = \pi$ *gilt.*

Satz 2 (Formel von Chapman-Kolmogorov)
Für die n-stufige Übergangswahrscheinlichkeit gilt:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \tag{2}$$

Diese Beziehung heißt Formel von Chapman-Kolmogorov.

Hängt die Zukunft nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab, so nennt man diese Eigenschaft, **Markov-Eigenschaft**, dadurch sind Markov-Prozesse definiert. Die Gleichung von Chapman-Kolmogorov ist die Konsequenz der Markov-Eigenschaft.

Im folgenden werden wir eine Folge von Zufallsvariablen konstruieren, die keine Markov-Eigenschaft besitzt, aber die Gleichung von Chapman-Kolmogorov erfüllt. Dabei ist (2) als Multiplikation der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu verstehen.

Beispiel 4
Die Folge der Zufallsvariablen ist keine Markovfolge, aber die Gleichung von Kolmogorov-Chapman ist erfüllt [8, S. 226]

Sei $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ *i.i.d. und* $Y_n \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4\})$
Für j=1, 2 und 3 definiere: $A_j^{(n)} = \{Y_n = j \text{ oder } Y_n = 4\}$

$\mathbb{P}(X_{3(m-1)+j}) = \frac{1}{2}$*, weil* $\mathbb{P}(A_j^{(n)}) = \frac{1}{2}$ *für* $\forall k_1, k_2, k_3 \in \{0,1\}$ *und* $n > m$ *gilt die Gleichung:*

$$\mathbb{P}[X_n = k_1] = \mathbb{P}[X_n = k_2 | X_m = k_3] = \frac{1}{2}$$

und für $l < m < n$ gilt:

$$\mathbb{P}[X_n = k_2 | X_l = k_1] = \frac{1}{2} = \underbrace{\mathbb{P}[X_n = k_2 | X_m = 0]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\mathbb{P}[X_m = 0 | X_l = k_1]}_{\frac{1}{2}} + \\ + \underbrace{\mathbb{P}[X_n = k_2 | X_m = 1]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\mathbb{P}[X_m = 1 | X_l = k_1]}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Das heißt die Chapman-Kolmogorov Gleichung ist für die Folge $\{X_n, n \geq 1\}$ erfüllt.

ABER:

$$\mathbb{P}\underbrace{[X_{3m} = 1 | X_{3m-2} = 1, X_{3m-1} = 1]}_{\text{sicheres Ereignis}} = 1 \text{ für } m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Also aus (3) folgt, dass die Folge $\{X_n, n \geq 1\}$ keine Markov-Eigenschaft besitzt und damit keine Markovfolge ist.

Beispiel 5
[8, S.228]

Sei $X = \{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ eine Markovkette mit dem Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$, der Anfangsverteilung $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und der Übergangsmatrix P

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Multipliziert man π mit P so sieht man, dass $\{X_n\}$ stationär ist. Wir definieren einen neuen Prozess $Y_n = g(X_n)$ und g ist eine Funktion auf E. Angenommen die Zustände i von X bei welchen g konstant ist, fügen sich in einen einzelnen Zustand des neuen Prozesse Y_n zusammen. Y_n wird aggregierter Prozess genannt. Die Menge der Zustände auf denen g den Wert x annimmt heißt die Menge der Zustände S_x. Es ist offensichtlich, dass nur nicht leere Mengen von Zuständen von interesse sind. Für die Markovkette fügen wir die Menge der Zustände S bestehend aus 1, 2 in einen Zustand zusammen.

Dazu betrachte folgende Wahrscheinlichkeiten:
$\mathbb{P}[X_{m+2} \in S, X_{m+1} \in S | X_m \in S]$ und $\mathbb{P}[[X_{m+1} \in S | X_m \in S]^2]$, da $\{X_n\}$ stationär ist, sind die Wahrscheinlichkeiten äquivalent zu

$$\mathbb{P}[X_2 \in S, X_1 \in S | X_0 \in S] = \frac{\mathbb{P}[X_2 \in S, X_1 \in S, X_0 \in S]}{\mathbb{P}[X_0 \in S]} = (\tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{48}) : \tfrac{2}{3} = \tfrac{29}{96}$$

$$\neq \mathbb{P}[[X_1 \in S | X_0 \in S]^2] = ((\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12}) : \tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{13^2}{24^2}$$

Diese Relation impliziert, dass der neue Prozess Y kein Markov-Prozess ist.

Beispiel 6
Eigenschaften der unabhängigen Zufallsvariablen, die nicht erweitert werden können zu einer stationären Markovkette [8, S. 233]

Wenn $\{X_n, n \geq 1\}$ *eine Folge der i.i.d. Zufallsvariablen und* $\mathbb{E}X_1 = \infty$, *dann ist* $\limsup_{n\to\infty}(\frac{X_n}{n}) = \infty$ *f.s.. Dieses Ergebnis ist die Konsequenz des Borel-Cantelli Lemmas. Erinnern wir uns an das Borel-Cantelli Lemma Teil 2: Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sein* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ *Ereignisse. Angenommen:* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] = \infty$ *und zusätzlich die Ereignisse* $A_1, A_2, \dots$ *unabhängig, dann*
$\mathbb{P}[$*"Es treten unendlich viele* A_n *ein"*$] = 1$, *Lemma vergleich [7] oder [4].*

Zu prüfen: $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \geq k) = \infty$ $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \geq k) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_1 \geq nk) =$

$$\underbrace{\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\frac{X_1}{k} \geq n)}_{\mathbb{E}(\frac{X_1}{k})} = \infty$$

Kann man diese Ergebnisse auf eine schwach abhängige Zufallsfolge übertragen? Dazu betrachten wir:

Sei $X = (X_n, n \geq 0)$ *eine stationäre Markovkette mit dem Zustandsraum* $E = \{1, 2, \dots\}$ *und*

$\mathbb{P}[X_n = k] = \frac{1}{k(k+1)}$ *für* $k = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$

$\mathbb{P}[X_n = k+1 | X_{n-1} = k] = \frac{k}{(k+2)}$

$\mathbb{P}[X_n = 1 | X_{n-1} = k] = \frac{2}{(k+2)}$ *für* $k = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$

$\mathbb{E}X_n = \infty$

Aber $X_n \leq X_o + n$ *f.s. für alle* n *und das impliziert* $\mathbb{P}[\limsup(\frac{X_n}{n} \leq 1)] = 1$, *folglich ist* $\limsup_{n\to\infty}(\frac{X_n}{n})$ *nicht endlich wie im Fall der unabhängigen Zufallsvariablen. Nutzt man die Ergebnisse von [5] kann man sehen, dass* $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ *f.s..*

Literatur

[1] 2013. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung#Momenterzeugende_Funktion.

[2] Robert Ash. *Real Analysis and Probability*. Acad. Press, New York, 1972.

[3] B.W. Gnedenko. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Kurs teorii verojatnostej*. 6. Auflage. Nauka, 1988.

[4] Zakhar Kabluchko. *Wahrscheinlichkeitsrechnung Vorlesungskript*. Universität Ulm. 2012.

[5] G.L. O'Brien. "The occurrence of large values in stationary sequences". In: *ZW 61* (1982), S. 347–353.

[6] Evgeny Spodarev. *Skript Stochastik II*. Universität Ulm. 2010.

[7] Evgeny Spodarev. *Wahrscheinlichkeitsrechnung Vorlesungskript*. Universität Ulm. 2008.

[8] Jordan M. Stojanov. *Counterexamples in Probability*. 2. ed. Wiley, 1997.