Seminar:

Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

-

Ausarbeitung zum Seminarthema:

„Zentraler Grenzwertsatz und diverse Grenzwertsätze“

Klaus Kuchler

20. Januar 2013

1 Zentraler Grenzwertsatz

1.1 Grundlagen, Sätze und Weiteres

Im Weiteren betrachten wir nun, soweit nichts anderes angegeben wird, immer eine Folge von **unabhängigen** Zufallsvariablen (ZVen) $\{X_n,\, n \geq 1\}$, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert ist. Es ist zu beachten, dass diese Folgen von ZVen nicht notwendigerweise identisch verteilt sein muss. Des Weiteren führen wir noch folgende allgemein bekannte Notationen ein:

F_k sei die Verteilungsfkt. von X_k,
$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ die Summe der ersten n ZVen,
$\sigma_k^2 = \operatorname{Var} X_k$ die Varianz der ZV X_k und
$s_n^2 = \operatorname{Var} S_n = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$ die Varianz der Summe S_n

Dann erfüllt die Folge $\{X_n,\, n \geq 1\}$ den Zentralen Grenzwertsatz (ZGWS), wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[(S_n - \mathbb{E}\, S_n)/s_n \leq x] = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

d.h. die Verteilungsfkt. von $(S_n - \mathbb{E}S_n)/s_n$ für $n \to \infty$ konvergiert punktweise bzw. sogar gleichmäßig in x gegen $\mathcal{N}(0,1)$.

Nun führen wir drei Bedingungen ein, die in einem wichtigen Zusammenhang mit dem ZGWS stehen. Dazu sei o.B.d.A. angenommen, dass $\mathbb{E}\, X_k = 0,\ \forall k \geq 1$.
Zuerst die sogenannte Lindeberg-Bedingung (diese kann beispielsweise die Voraussetzung der identischen Verteilung der ZVen im klassischen ZGWS ersetzen):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|u| \geq \varepsilon s_n} u^2\, \mathrm{d}F_k(u) = \ 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{\textbf{L}}$$

Als zweites die Feller-Bedingung:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \ 0 \tag{\textbf{F}}$$

Und als letztes noch die Bedingung der asymptotischen Vernachlässigbarkeit der Summanden:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}[|X_k/s_n| \geq \varepsilon] = \ 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{\textbf{AV}}$$

Im Folgenden formulieren wir zwei Sätze in Kurzform, die das Zusammenwirken der drei Bedingungen und des ZGWS zeigen (jeweils ohne Beweis):

Satz von Lindeberg.

$$(\mathbf{L}) \ \Rightarrow \ \text{ZGWS}$$

Der Satz von Lindeberg zeigt uns also, dass die Lindeberg-Bedingung lediglich eine hinreichende Bedingung für den ZGWS ist.
Die Lindeberg-Bedingung ist keine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des ZGWS.

Satz von Lindeberg-Feller.

$$(\mathbf{L}) \iff \text{ZGWS und } (\mathbf{F}) \iff \text{ZGWS und } (\mathbf{AV})$$

In den nachfolgenden Gegenbeispielen werden Fragestellungen aufgegriffen, die zeigen werden, dass einige mit dem ZGWS in Verbindung stehende Eigenschaften nicht gelten, obwohl man deren Gültigkeit eigentlich erwarten könnte.

1.2 Beispiel: Dreiecksschema, das den ZGWS nicht erfüllt

Wir betrachten folgendes Dreiecksschema für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= X_{11}; \\ S_2 &= X_{21} + X_{22}; \\ \vdots & \qquad\qquad \ddots \\ S_n &= X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nn}; \end{aligned}$$

wobei $X_{nk},\ k = 1, \ldots, n$ unabhängige und Poisson-verteilte ZVen mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2n}$ sind. Aufgrund der Faltungsstabilität der Poisson-Verteilung ist S_n ebenfalls Poisson-verteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$.
Nun könnte man erwarten, dass die Größe $(S_n - \mathbb{E}\, S_n)/s_n = (S_n - \frac{1}{2})/\sqrt{\frac{1}{2}}$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert. Dies trifft jedoch nicht zu und das, obwohl für große n jedes X_{nk} fast sicher null ist, denn

$$\mathbb{P}[X_{nk} = 0] = \mathrm{e}^{-1/2n} \approx 1 \text{ für } n \text{ gegen unendlich.}$$

Das der ZGWS für $(S_n - \frac{1}{2})/\sqrt{\frac{1}{2}}$ tatsächlich nicht erfüllt ist, zeigt die folgende Tatsache:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \mathbb{P}\left[\frac{S_n - 1/2}{\sqrt{1/2}} \leq \frac{-1/2}{\sqrt{1/2}}\right] = \mathbb{P}[S_n \leq 0] = \mathbb{P}[S_n = 0] = \mathrm{e}^{-1/2} \gg \Phi\left(\frac{-1/2}{\sqrt{1/2}}\right)$$

1.3 Beispiel: Beziehungen zwischen ZGWS, der Feller-Bedingung und der Bedingung der asymptotischen Vernachlässigbarkeit der Summanden

Die zu Beginn eingeführte Folge $\{X_n\}$ sei nun folgendermaßen verteilt: $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, wobei $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_k^2 = 2^{k-2}$, $k \geq 2$. Wegen der Invarianz der Normalverteilung gegenüber Faltung ist $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ auch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und

Varianz $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = 1 + \sum_{k=2}^n 2^{k-2} = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k \underset{\text{Summe}}{\overset{\text{geo.}}{=}} 1 + \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{n-1}$. Deshalb gilt trivialerweise für jedes n

$$S_n/s_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

und daher erfüllt $\{X_n\}$ den ZGWS.

Weiter liefert

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

die Ungültigkeit von (**F**) und

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \mathbb{P}[|X_k/s_n| \ge \varepsilon] \ge \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|\underbrace{X_n/s_n}_{\sim\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})}| \ge \varepsilon] = 1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u}_{<1} > 0$$

ebenso die Ungültigkeit von (**AV**).
Da nun weder (**F**) noch (**AV**) gelten, folgt mit dem Satz von Lindeberg-Feller, dass auch (**L**) nicht gilt. Nichtsdestotrotz erfüllt ja $\{X_n\}$ den ZGWS, was ums hiermit eindeutig nochmals klarmacht, dass die Lindeberg-Bedingung lediglich eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für den ZGWS ist.

1.4 Beispiel: Zwei in einem gewissen Sinne äquivalente Zufallsfolgen, von denen eine den ZGWS erfüllt und die andere nicht

Die erste der beiden Folgen von ZVen $\{X_n,\, n \ge 1\}$ sei durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X_1 = \pm 1] = \frac{1}{2} \qquad \text{und für } k \ge 2 \text{ und ein } c \in (0,1) \\ &\mathbb{P}[X_k = 0] = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) c,\ \mathbb{P}[X_k = \pm 1] = \frac{1}{2}(1-c),\ \mathbb{P}[X_k = \pm k] = \frac{1}{2k^2} c \end{aligned}$$

Die zweite Folge $\{\tilde{X}_{nk},\, k = 1, \dots, n,\, n \ge 1\}$ definieren wir durch „Abschneiden“ der ersten Folge:

$$\tilde{X}_{nk} = \begin{cases} X_k, & |X_k| \le \sqrt{n} \\ 0, & |X_k| > \sqrt{n} \end{cases}$$

Es bezeichne nun $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ die Summe der ersten n ZVen der Folge $\{X_n\}$ und $\tilde{S}_n = \tilde{X}_{n1} + \cdots + \tilde{X}_{nn}$ die n-te Summe der ZVen der Folge $\{\tilde{X}_{nk}\}$.
Nun kann gezeigt werden, dass $\{X_n\}$ sowohl (**L**) als auch den ZGWS nicht erfüllt, aber $\{\tilde{X}_{nk}\}$ die Bedingung (**L**) und damit auch den ZGWS erfüllt, d.h $(\tilde{S}_n - \mathbb{E}\,\tilde{S}_n)/\tilde{s}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. Im Buch *Counterexamples in Probability* von Jordan M. Stoyanov sind dazu auf den Seiten 184 u. 186 nähere Details zu finden.

Was an dieser Stelle nun noch gezeigt werden soll ist, dass die beiden Folgen $\{S_n\}$ und $\{\tilde{S}_n\}$ äquivalent sind in folgendem Sinne:

$$\mathbb{P}[S_n \neq \tilde{S}_n] \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Dies gilt, da

$$\mathbb{P}[S_n \neq \tilde{S}_n] \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_k \neq \tilde{X}_{nk}] \underset{\text{Def.}}{\overset{\text{per}}{=}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[|X_k| > \sqrt{n}] \leq \sum_{k=\lceil \sqrt{n} \rceil}^{n} \mathbb{P}[|X_k| = k] = \sum_{k=\lceil \sqrt{n} \rceil}^{n} \frac{1}{k^2} c$$

und da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

folgt, dass die „Reihenreste“ gegen 0 konvergieren (Konvergenzkriterium von Cauchy), d.h.

$$c \sum_{k=\lceil \sqrt{n} \rceil}^{n} \frac{1}{k^2} \overset{n \to \infty}{\to} 0 \qquad \Rightarrow \mathbb{P}[S_n \neq \tilde{S}_n] \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Wir haben hier also ein Beispiel für zwei im obigen Sinne äquivalente Zufallsfolgen gefunden, von denen jedoch nur eine den ZGWS erfüllt.

1.5 Beispiel: Wenn der ZGWS für eine Folge von Zufallsvariablen gilt, konvergiert dann die Varianz von $S_n/\sqrt{n}$ immer gegen 1?

In diesem Gegenbeispiel betrachten wir die zwei Folgen $\{X_n,\, n \geq 1\}$ und $\{Y_n,\, n \geq 1\}$, deren ZVen erneut unabhängig und wie folgt verteilt sind:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_k = \pm 1] = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k^2}), \quad \mathbb{P}[X_k = \pm k] = \frac{1}{2k^2} \\ \text{und} \quad & \mathbb{P}[Y_k = \pm 1] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wie gewohnt sei

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \qquad \text{und} \qquad \tilde{S}_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Der Erwartungswert von X_n, als auch von Y_n sind gleich null. Des Weiteren ist die Varianz von Y_n gleich 1 und da ja die Y_n u.i.v. sind, ergibt sich die Gültigkeit des ZGWS für die Folge $\{Y_n\}$, d.h. $\tilde{S}_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. Durch Anwendung des Prinzips der Trunkation auf die Folge $\{X_n\}$, erhalten wir für $S_n/\sqrt{n}$ das Gleiche Grenzverhalten in Verteilung wie für $\tilde{S}_n/\sqrt{n}$, d.h. dass auch $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.
Nun könnte man doch vermuten, dass sowohl

$$\mathrm{Var}(S_n/\sqrt{n}) \overset{n \to \infty}{\to} 1 \qquad \text{als auch} \qquad \mathrm{Var}(\tilde{S}_n/\sqrt{n}) \overset{n \to \infty}{\to} 1.$$

Wenn wir diese Vermutung nun untersuchen, stellen wir zuerst fest, dass die Vermutung für die Folge $\{Y_n\}$, also genauer für $\tilde{S}_n/\sqrt{n}$ auch tatsächlich gilt, denn

$$\operatorname{Var}(\tilde{S}_n/\sqrt{n}) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}(\tilde{S}_n) = \frac{1}{n}\, n \operatorname{Var} Y_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aber unsere Vermutung trifft nicht auf die Folge $\{X_n\}$ zu, da

$$\operatorname{Var}(S_n/\sqrt{n}) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2 - \frac{1}{k^2} = 2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \overset{n\to\infty}{\to} 2.$$

Dies zeigt uns also, dass die Gültigkeit des ZGWS nicht immer die Konvergenz der Varianz der normierten Summe $S_n/\sqrt{n}$ gegen die Varianz der Standardnormalverteilung impliziert. Anders ausgedrückt sichert der ZGWS i.A. nicht die Konvergenz der Momente von $S_n/\sqrt{n}$ gegen die Momente der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung. Zur Sicherung deren Konvergenz ist eine zusätzliche Integrierbarkeitsbedingung notwendig, im Speziellen hier

$$\mathbb{E}[|S_n/\sqrt{n}|^{2+\delta}] < \infty \text{ für } \delta > 0 \text{ damit } \operatorname{Var}(S_n/\sqrt{n}) \overset{n\to\infty}{\to} 1.$$

1.6 Beispiel: Gilt der ZGWS für zufällige Summen von ZVen immer?

Die Antwort auf die in der Überschrift gestellte Frage ist, wie sollte es hier auch anders sein, nein.
Bevor wir uns dazu ein Beispiel ansehen, wollen wir zunächst noch einführen, was wir unter dem ZGWS für zufällige Summen von ZVen verstehen.
Wir betrachten zuallererst eine Folge von ZVen $\{X_n,\, n \geq 1\}$, die den ZGWS erfüllt. Dazu kommt noch eine zweite Folge von ZVen $\{\nu_n,\, n \geq 1\}$, die Werte in $\mathbb{N}_0$ annehmen kann und die für n gegen ∞ selbst fast sicher gegen ∞ konvergiert. Nun können wir T_n definieren als $T_n := S_{\nu_n} = X_1 + \cdots + X_{\nu_n}$ und b_n^2 als $b_n^2 := \operatorname{Var} T_n$. Der ZGWS gilt nun für die zufälligen Summen T_n, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[(T_n - \mathbb{E}\, T_n)/b_n \leq x] = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nun wollen wir uns ein Beispiel ansehen, in dem (2) nicht erfüllt ist. Dazu sei die Folge $\{X_n,\, n \geq 1\}$ u.i.v. mit $\mathbb{P}[X_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$ und die Folge $\{\nu_n,\, n \geq 1\}$ unabhängige ZVen, die die Werte n und $2n$ mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ resp. $q = 1 - p$ annehmen. Dabei seien die ZVen $\{\nu_n\}$ und $\{X_n\}$ selbst wiederum voneinander unabhängig. Dann gilt zum einen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\, T_n &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[T_n|\nu_n]] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[S_{\nu_n}|\nu_n]}_{=\nu_n \mathbb{E}\, X_1}] \overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[\nu_n]\, \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{=0} = 0, \\
b_n^2 &= \operatorname{Var} T_n = \operatorname{Var}[\underbrace{\mathbb{E}[T_n|\nu_n]}_{=\nu_n \mathbb{E}\, X_1}] + \mathbb{E}[\operatorname{Var}[T_n|\nu_n]] \\
&= (\mathbb{E}\, X_1)^2 \operatorname{Var}[\nu_n] + \mathbb{E}[\underbrace{\operatorname{Var}[S_{\nu_n}|\nu_n]}_{=\nu_n \operatorname{Var}[X_1]}] = \underbrace{\operatorname{Var}[X_1]}_{=1}\, \mathbb{E}[\nu_n] \\
&= \mathbb{E}[\nu_n] = np + 2nq = (1 - q + 2q)n = (1+q)n
\end{aligned}
$$

und zum anderen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_n/b_n \le x] &\overset{\text{totale}}{\underset{\text{Wkt.}}{=}} \mathbb{P}[T_n/b_n \le x|\nu_n = n]\, \mathbb{P}[\nu_n = n] + \mathbb{P}[T_n/b_n \le x|\nu_n = 2n]\, \mathbb{P}[\nu_n = 2n] \\
&= p\, \mathbb{P}[S_{\nu_n}/b_n \le x|\nu_n = n] + q\, \mathbb{P}[S_{\nu_n}/b_n \le x|\nu_n = 2n] \\
&= p\, \mathbb{P}[S_n/b_n \le x|\cancel{\nu_n = n}] + q\, \mathbb{P}[S_{2n}/b_n \le x|\cancel{\nu_n = 2n}] \\
&= p\, \mathbb{P}[S_n/b_n \le x] + q\, \mathbb{P}[S_{2n}/b_n \le x] \\
&= p\, \mathbb{P}[S_n/\sqrt{n} \le x b_n/\sqrt{n}] + q\, \mathbb{P}[S_{2n}/\sqrt{2n} \le x b_n/\sqrt{2n}] \\
&= p\, \mathbb{P}[S_n/\sqrt{n} \le x\sqrt{1+q}] + q\, \mathbb{P}[S_{2n}/\sqrt{2n} \le x\sqrt{1+q}/\sqrt{2}] \\
\{X_n\} \text{ erfüllt ZGWS } &\xrightarrow[n\to\infty]{d} \begin{cases} \Phi(x\sqrt{1+q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x\sqrt{1+q}} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \text{ mit Wkt. } p \\ \Phi(x\sqrt{1+q}/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x\sqrt{1+q}/\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \text{ mit Wkt. } q \end{cases} \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+q)^{-1}}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-z^2/2(1+q)^{-1}}\, \mathrm{d}z \text{ mit Wkt. } p \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi 2(1+q)^{-1}}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-z^2/4(1+q)^{-1}}\, \mathrm{d}z \text{ mit Wkt. } q. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Daher gilt (2) nicht, denn $\mathbb{P}[T_n/b_n \le x]$ konvergiert vielmehr gegen eine gemischte Verteilung bestehend aus zwei ZVen

$$
\begin{aligned}
\xi &\sim \mathcal{N}(0, (1+q)^{-1}) \text{ mit Wkt. } p, \\
\eta &\sim \mathcal{N}(0, 2(1+q)^{-1}) \text{ mit Wkt. } q.
\end{aligned}
$$

2 Diverse Grenzwertsätze

In diesem Abschnitt wollen wir uns noch einige Beispiele ansehen, die sich mit anderen Arten des Konvergenzverhaltens von Zufallsfolgen beschäftigen. Bevor wir jedoch mit den Beispielen beginnen, wollen wir zunächst noch einen wichtigen und dienlichen Satz einführen.

2.1 Grundlagen, Sätze und Weiteres

Drei-Reihen-Satz von Kolmogorov. Sei $\{X_n, n \geq 1\}$ eine Folge unabhängiger ZVen und $X_n^{(c)} := X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leq c\}$ für ein $c > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert $\mathbb{P}$-*f.s.*

(ii) Die drei Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n^{(c)}]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n^{(c)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq c]$ konvergieren für jedes $c > 0$.

(iii) Es existiert ein $c > 0$, sodass die drei Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n^{(c)}]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n^{(c)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq c]$ konvergieren.

2.2 Beispiel: Prüfe auf $\mathbb{P}-f.s$ Konvergenz mit Hilfe des Drei-Reihen-Satzes von Kolmogorov

Wir wollen die beiden zufälligen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ mit } X_n = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ für } p = \frac{1}{2}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n \text{ mit } \begin{cases} Y_n = -\frac{1}{n} \text{ für } p \in (0, \frac{1}{2}) \\ Y_n = \frac{1}{n} \text{ für } 1 - p \end{cases}$$

auf $\mathbb{P}-f.s$ Konvergenz mit Hilfe des Drei-Reihen-Satzes von Kolmogorov untersuchen.
Zuerst nehmen wir uns die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ vor. Der Erwartungswert von X_n ist null und die Varianz $\operatorname{Var} X_n = \frac{1}{n}$. Weiter wählen wir $c = 1$ und erhalten so für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n^{(c)}$ aus dem Drei-Reihen-Satz von Kolmogorov folgendes Resultat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leq 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Wenn nun angenommen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ fast sicher konvergieren würde, so müssten alle drei Reihen im Drei-Reihen-Satz von Kolmogoro aus (ii) für alle $c > 0$ konvergieren. Jedoch haben wir ja gerade mit $c = 1$ dies widerlegt, weshalb $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ nicht fast sicher konvergiert.
Nun noch zur zweiten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. Für den Erwartungswert von Y_n bekomen wir

$\mathbb{E}\, Y_n = -\frac{1}{n}p + \frac{1}{n}(1-p) = \frac{1}{n}(1-2p)$. Erneut wählen wir $c = 1$ und erhalten so für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\, Y_n^{(c)}$ aus dem Drei-Reihen-Satz von Kolmogorov folgendes Resultat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\, Y_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\, Y_n \mathbb{1}\{|Y_n| \leq 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\, Y_n = (1-2p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Analog zur ersten Reihe folgt, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ nicht fast sicher konvergiert.

2.3 Beispiel: Beziehung zwischen Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ für ZVen und bedingte Erwartungswerte

Wir haben einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine beliebige Teil-σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Des Weiteren haben wir ZVen X und $\{X_n,\, n \geq 1\}$ die $\mathcal{L}^p$-integrierbar sind und es gelte $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$ für $n \to \infty,\ p \geq 1$. Dann folgt mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte, dass auch die Konvergenz von $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] \overset{\mathcal{L}^p}{\to} \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ gilt $\big(0 \leq \mathbb{E}[|\,\mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]|^p] = \mathbb{E}[|\,\mathbb{E}[X_n - X|\mathcal{A}]|^p] \underset{\text{Ungl.}}{\overset{\text{Jensen}}{\leq}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_n - X|^p|\mathcal{A}]] \overset{\mathbb{P}-f.s.}{=} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] \overset{n\to\infty}{\to} 0\big)$.

Ob nun auch die Umkehrung gilt, wollen wir anhand eines Beispiels überprüfen:

Seien $\{X_n,\, n \geq 1\}$ u.i.v. mit $\mathbb{P}[X_1 = 2c] = \mathbb{P}[X_1 = 0] = \frac{1}{2}$ und $X \overset{\mathbb{P}-f.s.}{=} c$ für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Als Teil-$\sigma$-Algebra wählen wir $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und erhalten somit, da

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X_n] = 2c\,\mathbb{P}[X_n = 2c] + 0\,\mathbb{P}[X_n = 0] = 2c\frac{1}{2} = c, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X] = c,$$

dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|\,\mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]|^p] = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

Jedoch gilt für

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \overset{\mathbb{P}-f.s.}{=} \mathbb{E}[|X_n - c|^p] = \frac{1}{2}|2c - c|^p + \frac{1}{2}|0 - c|^p = |c|^p \neq 0, \quad \forall n, p \geq 1.$$

Damit gilt die Umkehrung i.A. nicht, denn wie unser Beispiel gezeigt hat, folgt aus $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] \overset{\mathcal{L}^p}{\to} \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ nicht $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$ für $n \to \infty,\ p \geq 1$.