Ausarbeitung zum Seminarthema

Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Normalverteilung und Momentenproblem

Mathias Schaefer

13. März 2013

In dieser Seminararbeit wird anhand einiger Beispiele gezeigt, warum bestimmte Aussagen bezüglich der Normalverteilung und des Momentenproblems nicht äquivalent sind, sondern nur in einer Richtung gelten. Hierfür werden einschlägige Gegenbeispiele vorgestellt.

1 Normalverteilung

1.1 Nicht-normalverteilte bivariate Verteilungen, deren Randverteilungen aber normalverteilt sind

Folgendes Beispiel soll zeigen, dass es nicht-normalverteilte bivariate Verteilungen gibt, deren Randverteilungen jedoch normalverteilt sind.

Sei h(x), x $\in \mathbb{R}$ eine **ungerade** stetige Funktion auf [-1,1], mit h(x) = 0 auf $[-1,1]^c$, die die Bedingung

$$|h(x)| \leq (2\pi e)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \quad \text{erfüllt.}$$

Definiere

$$f(x,y) := \varphi(x)\varphi(y) + h(x)h(y),$$

wobei φ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Man kann zeigen, dass f(x,y), (x,y) $\in \mathbb{R}^2$ eine bivariate Dichte ist, aber nicht die Dichte der bivariaten Normalverteilung ist, jedoch die Randverteilungen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ die Dichten der Standardnormalverteilung sind.

Beweis:

a) $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} h(y)\,\mathrm{d}y = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1.$

Hierbei wurde bei der ersten Gleichheit der Satz von Fubini angewendet, sowie in der zweiten Gleichheit die Tatsache, dass φ eine Dichte ist, sowie h eine ungerade Funktion.

b) Zu zeigen ist, dass f(x,y) $\geq 0\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Es gilt $f(x,y) = \varphi(x)\varphi(y) + h(x)h(y)$ und $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{e})^{x^2}}$.

Laut Voraussetzung gilt $|h(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

Wegen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{e})^1} \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{e})^0}$ in [-1,1] gilt also

$|h(x)| \leq \varphi(x)$ in [-1,1] sowie $|h(y)| \leq \varphi(y)$ in [-1,1],

insgesamt also $|h(x)h(y)| \leq \varphi(x)\varphi(y)$ in [-1,1]^2,

und folglich $f(x,y) \geq 0$ in $\mathbb{R}^2$. Die Funktion f ist also eine gültige Dichte.

c) Es gilt $f(x,y) = \varphi(x)\varphi(y) + h(x)h(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + h(x)h(y)$.

Für $h \neq 0$ ist f(x,y) also nicht die Dichte der bivariaten Normalverteilung.

d) $f_X(x) = \varphi(x)\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y + h(x)\int_{\mathbb{R}} h(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x)\cdot 1 + 0 = \varphi(x)$ (Y analog)

q.e.d.

Eine gültige Version der Funktion h ist z.B. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}x^3\mathbb{1}_{[-1,1]}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

1.2 Die Beziehung zwischen Unabhängigkeit und Unkorreliertheit bzgl. der Normalverteilung

Theorem: Sei (X,Y) ein bivariat normalverteilter Zufallsvektor.
a) X und Y sind jeweils normalverteilt.
b) X und Y unkorreliert $\Leftrightarrow$ X und Y unabhängig.

Man kann anhand folgender zwei Beispiele zeigen, wie entscheidend die bivariate Normalverteiltheit von (X,Y) ist.

Beispiel 1:

Sei $X \sim N(0,1)$. Für ein festes $c \geq 0$ definiere die ZV Y wie folgt:

$$Y = \begin{cases} X, & |X| \leq c \\ -X, & |X| > c \end{cases}$$

Es gilt $Y \sim N(0,1)$ für jedes c, denn:

$X \sim N(0,1),\ -X \sim N(0,1)$ (aufgrund der Symmetrie der Standardnormalverteilung),

sowie:

Sei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 und Ω_2 seien disjunkt.

$\Rightarrow P_Y(B) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega_1 \mid X(\omega) \in B\} \cup \{\omega \in \Omega_2 \mid -X(\omega) \in B\} =$

$\{\omega \in \Omega_1 \mid X(\omega) \in B\} \cup \{\omega \in \Omega_2 \mid X(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = P_X(B) \forall\, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

wobei beim dritten Gleichheitszeichen die Eigenschaft der Symmetrie verwendet wird.

Ferner gilt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2\ \mathbb{1}(|X| \leq c)) - \mathbb{E}(X^2\ \mathbb{1}(|X| > c))$.

Wenn $c = 0$ ist, gilt:

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2\ \mathbb{1}(|X| \leq 0)) - \mathbb{E}(X^2\ \mathbb{1}(|X| > 0)) = \mathbb{E}(X^2\ \mathbb{1}(X = 0)) -$

$- \mathbb{E}(X^2\ \mathbb{1}(|X| > 0)) = \int_{\{0\}} x^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} x^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 - 1 = -1.$

Bei letzterem Integral wurde die Tatsache benutzt, dass der Erwartungswert der χ^2_1-Verteilung 1 beträgt.

Wenn $c \to \infty$:

$\mathbb{E}(XY) \to \mathbb{E}(X^2\, \mathbb{1}(|X| \leq \infty)) - \mathbb{E}(X^2\, \mathbb{1}((|X| > \infty))) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x - 0 = 1.$

Da $\mathbb{E}(XY)$ stetig von c abhängt, existiert ein c_0, sodass $\rho(X,Y) = \mathbb{E}(XY) = 0$.
$c_0 \approx 1{,}54$ ist die einzige Lösung der Gleichung $\mathbb{E}(XY) = 4\int_0^{c_0} x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x - 1 = 0$. Für dieses c_0 sind X und Y also unkorreliert.
Jedoch gilt $\mathbb{P}(X > c, Y > c) = 0 \neq \mathbb{P}(X > c)\,\mathbb{P}(Y > c)$, somit sind X und Y **nicht** unabhängig.

Beispiel 2:

Seien $\varphi_1(x,y)$ und $\varphi_2(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ standardnormalverteilte bivariate Dichten mit Korrelationskoeffizienten ρ_1 bzw. ρ_2.

Definiere $f(x,y) := c_1\varphi_1(x,y) + c_2\varphi_2(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

wobei $c_1, c_2 \geq 0$ mit $c_1 + c_2 = 1$.

Direkte Berechnung liefert, dass f nicht-normalverteilt ist, wenn $\rho_1 \neq \rho_2$.

Ist nun (X,Y) ein Zufallsvektor mit Dichte f, dann stellt man durch einfache Berechnung fest, dass $X \sim N(0,1),\ Y \sim N(0,1)$.

Zudem ergibt die Berechnung des Korrelationskoeffizienten von X und Y:

$\rho = c_1\rho_1 + c_2\rho_2$. Wählt man c_1, c_2, ρ_1, ρ_2 so, dass $c_1\rho_1 + c_2\rho_2 = 0$, erhält man zwei standardnormalverteilte und unkorrelierte ZV X und Y. Diese sind jedoch laut Berechnung **nicht** unabhängig.

1.3 Verschiedene Zufallsvektoren mit gleichen Kovarianzmatrizen

Zwei Zufallsvektoren mit der gleichen Normalverteilung können auf verschiedene Art über unabhängige standardnormalverteilte ZVen erhalten werden.

Dazu betrachtet man folgende Version der Definition der Normalverteilung:

Eine Menge von ZVen $X_1, ..., X_N$ mit jeweils Erwartungswert 0 ist multivariat normalverteilt, wenn diese ZVen Linearkombinationen von unabhängigen standardnormalverteilten ZVen $\xi_1, ..., \xi_M$ sind, also

$$X_i = \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\xi_j \ ; \ i = 1, ..., N,$$

wobei $c_{ij} \in \mathbb{R}$ und für jedes i muss mindestens ein j existieren, das $\neq 0$ ist.
Möglich ist hier M < N, M = N oder M > N.
Seien nun unabhängige standardnormalverteilte ZVen $\xi_1, ..., \xi_M$ gegeben. Eine feste Matrix (c_{ij}) erzeugt einen Zufallsvektor mit multivariater Normalverteilung. Die Frage ist nun, ob verschiedene Matrizen Zufallsvektoren mit unterschiedlicher multivariater Normalverteilung erzeugen. Dazu verwendet man folgenden Satz (Breiman 1969):

Haben zwei Zufallsvektoren $(X_1, ..., X_n)$ und $(Y_1, ..., Y_n)$ multivariate Normalverteilung mit gleichem Erwartungswertvektor und die gleiche Kovarianzmatrix, so besitzen sie die gleiche Verteilung.

Laut obiger Darstellung sind die Zufallsvektoren $(X_1, ..., X_n)$ und $(Y_1, ..., Y_n)$ Transformationen von unabhängigen standardnormalverteilten ZVen in Verbindung mit jeweils einer festen Matrix. Betrachte folgendes Beispiel, um zu zeigen, dass diese Matrix nicht für beide Zufallsvektoren gleich sein muss:

Seien ξ_1 und ξ_2 zwei unabhängige standardnormalverteilte ZVen und seien

$X_1 = \xi_1 + \xi_2$ und $X_2 = 2\xi_1 + \xi_2$, sowie

$Y_1 = \sqrt{2}\xi_1$ und $Y_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2$.

So erhält man also zwei Zufallsvektoren (X_1, X_2) und (Y_1, Y_2). Beide haben Erwartungswertvektor 0 und die gleiche Kovarianzmatrix, nämlich $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Beweis für die Kovarianzmatrix von (X_1, X_2):

$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(\xi_1) + \mathrm{Var}(\xi_2) = 2$

$\mathrm{Var}(X_2) = 4\,\mathrm{Var}(\xi_1) + \mathrm{Var}(\xi_2) = 5$

$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(\xi_1, 2\xi_1) + \mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathrm{Cov}(\xi_2, 2\xi_1) + \mathrm{Cov}(\xi_2, \xi_2) = 2\,\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_1) + 0 + 2\,\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) + 1 = 2 + 0 + 0 + 1 = 3$, für (Y_1, Y_2) analog.

$\Rightarrow (X_1, X_2)$ und (Y_1, Y_2) haben beide jeweils obige Kovarianzmatrix.

Zudem sind beide Zufallsvektoren bivariat normalverteilt. Nach obigem Satz haben sie also die gleiche Verteilung, trotz unterschiedlicher Bauart.

2 Momentenproblem

2.1 Hyperexponentialverteilung

Definition:

Eine ZV X ist hyperexponentialverteilt ($X \sim \mathcal{H}^+(a, b, c)$), $a, b, c > 0$, wenn sie folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = cb^{-\frac{a}{c}}(\Gamma(\tfrac{a}{c}))^{-1}x^{a-1}\exp(-\tfrac{x^c}{b})\mathbb{1}(x > 0).$$

Man kann zeigen (siehe Hoffmann-Jorgensen 1994), dass $\mathbb{E}(X^k)$ für jedes $k \geq 0$ existiert und

$$\mathbb{E}(X^k) = b^{\frac{k}{c}}\frac{\Gamma(\frac{k+a}{c})}{\Gamma(\frac{a}{c})}$$

Folglich hat die ZV X endliche Momente $\alpha_k = \mathbb{E}(X^k)$; k=1,2,...

Folgende Konstruktion zeigt, dass das Momentenproblem für $a > 0, b > 0, 0 < c < 0,5$ unbestimmt ist:

Wähle $\rho > 0$ so, dass $m := a + \rho$ eine natürliche Zahl ist, seien $r = \frac{\rho}{c}, \lambda = r + \frac{1}{b}$, $s = \tan(c\pi)$ und betrachte die Funktion

$$\psi(u) = u^\rho \exp(-ru^c)\sin(\lambda su^c), u > 0.$$

Da $e^{-x} \leq r^r x^{-r}$ für jedes $x > 0$, gilt $|\psi(u)| \leq 1, u > 0$.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $n = k + m$ auch eine natürliche Zahl, $v := c\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und man erhält mithilfe der Substitutionsregel (setze $x = u^c$):

$$c\int_0^\infty u^{k+a-1}\psi(u)\exp(-\tfrac{u^c}{b})\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty x^{(\frac{n\pi}{v})-1}e^{-\lambda x}\sin(\lambda s x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dies bedeutet, für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ gilt folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty u^k f_\epsilon(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u^k f(u)\,\mathrm{d}u,$$

wobei f die hyperexponentielle Dichte ist und

$$f_\epsilon(x) = f(x)(1+\epsilon\psi(x))\mathbb{1}(x>0).$$

Da $|\psi(x)| \leq 1, x > 0$, ist f_ϵ für jedes $\epsilon \in [-1,1]$ die Dichte einer ZV X_ϵ und

$$\mathbb{E}(X_\epsilon^k) = \mathbb{E}(X^k);\ \text{k=1,2,...},$$

obwohl $f_\epsilon \neq f$ (außer für $\epsilon = 0$).

2.2 Die Krein-Bedingung

Nun ein Beispiel dafür, dass die Krein-Bedingung eine hinreichende Bedingung für die Unbestimmtheit eines Momentenproblems ist, jedoch keine notwendige Bedingung.

Die Krein-Bedingung besagt Folgendes:

a) Sei $F(x), x \in \mathbb{R}$ eine absolutstetige Verteilungsfunktion mit Dichte $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$. Wenn alle Momente existieren, und

$$\int_{-\infty}^\infty -\frac{\log f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

dann ist das Momentenproblem unbestimmt.

b) Sei X eine absolutstetige ZV mit $X \geq 0$ fast sicher. Wenn alle Momente existieren, und

$$\int_0^\infty -\frac{\log f(x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

dann ist das Momentenproblem unbestimmt.

Sei $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ und $\delta > 0$. Dann lautet die Dichte von $|X|^\delta$

$$f_\delta(x) = \tfrac{2}{\delta\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{\delta}-1} \exp(-x^{\frac{2}{\delta}}) \mathbb{1}(x > 0)$$

und man kann berechnen, dass alle Momente $\mathbb{E}((|X|^\delta)^k)$ existieren.

Es wurde bewiesen (Berg, 1988), dass das Momentenproblem für $|X|^\delta$ für $\delta \leq 4$ bestimmt ist, für $\delta > 4$ jedoch unbestimmt.

Es ergibt sich das folgende Resultat:

$$\textstyle\int_0^\infty \frac{\log f_\delta(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\, \mathrm{d}x = -\infty.$$

Wendet man nun die Substitutionsregel an ($x = u^2$), so gilt:

$$\textstyle 2\int_0^\infty \frac{\log f_\delta(u^2)}{1+u^2}\, \mathrm{d}u = -\infty,$$

d.h. die Krein-Bedingung ist nicht erfüllt und somit keine notwendige Bedingung für die Unbestimmtheit eines Momentenproblems.

Quelle: J. Stoyanov: Counterexamples in Probability (2nd edition), Wiley 1997.