Ausarbeitung zum Seminarthema „Eigenschaften von Zufallsereignissen“

Milena Bös

22. November 2012

1 Über die Gültigkeit des Konsistenzsatzes von Kolmogorov im Messraum $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$

Für die Räume $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ werden Wahrscheinlichkeitsmaße zuerst für Elementarmengen (Rechtecke $(a, b] \subset \mathbb{R}^n$) konstruiert, dann für Mengen $A = \bigcup(a_i, b_i]$ und schließlich mit dem Fortsetzungssatz von Carathéodory für Mengen aus $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Eine ähnliche Vorgehensweise wird für den Raum $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ benutzt. Zunächst wird eine Zylindermenge in $\mathbb{R}^\infty$ mit Basis $B \in \mathcal{B}^n$ definiert:

$$C_n(B) = \{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, ..., x_n) \in B\}.$$

Dabei werden ihre Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}_n(C_n(B))$ durch die Wahrscheinlichkeitsmaße der Mengen $B \in \mathcal{B}^\infty$ definiert. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß kann auch äquivalent zur σ-Additivität definiert werden als endlich additiv und σ-stetig in der leeren Menge[1]. Letzteres bedeutet, dass für beliebige Ereignisse $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ mit $A_{n+1} \subset A_n$ und $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$. Setze für $n = 1, 2, ...$:

$$\mathbb{P}_n(B) = \mathbb{P}(C_n(B)), \qquad B \in \mathcal{B}^n. \tag{1}$$

Die Folge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ...$, jeweils definiert auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1), (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2), ...$, erfüllt für $n = 1, 2, ...$ und $B \in \mathcal{B}^n$ folgende Konsistenzeigenschaft:

$$\mathbb{P}_{n+1}(B \times \mathbb{R}^1) = \mathbb{P}_n(B). \tag{2}$$

[1] Siehe [1] S.6 oder auch http://www.math.uni-kiel.de/stochastik/roesler/vorlesung/mass/Mass.pdf S.8 f.

Konsistenzsatz von Kolmogorov[2]. *Seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ...$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1), (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2), ...$, welche die Konsistenzeigenschaft (2) erfüllen. Dann gibt es ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$, sodass*

$$\mathbb{P}(C_n(B)) = \mathbb{P}_n(B), \qquad B \in \mathcal{B}^n, \quad n = 1, 2, ...$$

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, dass der Konsistenzsatz im Allgemeinen nicht unbedingt gelten muss, wenn beispielsweise der Raum Ω nicht vollständig ist.
Betrachte den Raum $\Omega = (0, 1]$. Es ist offensichtlich, dass dieser Raum nicht vollständig ist. Man konstruiert nun σ-Algebren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...$ und eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\mathbb{P}_n\}$, wobei $\mathbb{P}_n$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ definiert ist. Sei $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$ die kleinste σ-Algebra, in der alle $\mathcal{F}_n$ enthalten sind. Dann kann gezeigt werden, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gibt, sodass für dessen Einschränkung $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$ auf $\mathcal{F}_n$ gilt: $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n} = \mathbb{P}_n$ für $n = 1, 2, ...$
Zunächst definiere man für $n = 1, 2, ..$

$$\varphi_n(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 < \omega < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq \omega \leq 1, \end{cases}$$
$$\mathcal{C}_n = \{A \in \Omega : \quad A = \{\omega : \varphi_n(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n)$ die kleinste σ-Algebra, welche die Mengen $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ enthält. Es ist klar, dass $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ....$ Man betrachte den Messraum $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ und definiere darauf ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_n$ folgendermaßen:

$$\mathbb{P}_n(\{\omega : (\varphi_1(\omega), ..., \varphi_n(\omega)) \in B^n\}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (1, ..., 1) \in B^n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $B^n \in \mathcal{B}^n$. Es ist leicht zu sehen, dass die Familie $\{\mathbb{P}_n\}$ die Konsistenzeigenschaft (2) erfüllt: für $A \in \mathcal{F}_n$ gilt $\mathbb{P}_{n+1}(A \times \mathbb{R}^1) = \mathbb{P}_n(A)$.
Man nehme nun an, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ existiert, sodass $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n} = \mathbb{P}_n$. Dann muss für $n = 1, 2, ...$ gelten

$$\mathbb{P}(\{\omega : \varphi_1(\omega) = ... = \varphi_n(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}_n(\{\omega : \varphi_1(\omega) = ... = \varphi_n(\omega) = 1\}) = 1. \tag{3}$$

Allerdings gilt auch

$$\{\omega : \varphi_1(\omega) = ... = \varphi_n(\omega) = 1\} = (0, \frac{1}{n}) \downarrow \emptyset.$$

Dies widerspricht (3) und somit auch der Annahme, dass die Mengenfunktion $\mathbb{P}$ σ-additiv sei (bzw. äquivalent hierzu, dass $\mathbb{P}$ σ-stetig in der leeren Menge sei).

[2] Für den Beweis siehe beispielsweise [2] S. 163 f.

2 Wahrscheinlichkeitsräume mit nicht-trivialen unabhängigen Ereignissen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ heißen nicht-trivial und unabhängig, wenn $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ gilt und:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Nicht jeder Wahrscheinlichkeitsraum enthält nicht-triviale, unabhängige Ereignisse. Solche Wahrscheinlichkeitsräume heißen vollständig abhängig. Im folgenden Beispiel untersuchen wir verschiedene nicht-triviale Wahrscheinlichkeitsräume auf vollständige Abhängigkeit, d.h. wir prüfen ob sie solche Ereignisse enthalten können.

2.1 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ sei eine endliche Menge von Elementarereignissen und

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 1 - (n-1)\epsilon, \qquad \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \epsilon \quad \text{für } k = 2, 3, ..., n.$$

Dabei sei $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $0 < \epsilon < (n-1)^{-1}$.
Annahme: Es existiert ein Paar A, B von nicht-trivialen unabhängigen Ereignissen.
Nun gibt es folgende drei Möglichkeiten:

(1) $\omega_1 \notin A$, $\omega_1 \notin B$;

(2) $\omega_1 \notin A$, $\omega_1 \in B$ oder umgekehrt;

(3) $\omega_1 \in A$, $\omega_1 \in B$.

Nun ist zu zeigen, dass die Unabhängigkeit in keinem der drei Fälle erfüllt ist.

Zu (1): A besitze k Ergebnisse und B besitze l Ergebnisse aus $\{\omega_2, ..., \omega_n\}$. Dann enthält der Schnitt $A \cap B$ m Elemente aus $\{\omega_2, ..., \omega_n\}$. Wegen der Unabhängigkeit von A und B muss nun gelten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \text{ also} \\ m\epsilon = k\epsilon \cdot l\epsilon \\ \Rightarrow \epsilon = \frac{m}{k \cdot l} \end{aligned}$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass ϵ irrational ist.

Zu (2): A besitze k Ergebnisse aus $\{\omega_2, ..., \omega_n\}$, B besitze l Ergebnisse aus $\{\omega_2, ..., \omega_n\}$

und ω_1. Dann enthält der Schnitt $A \cap B$ m Elemente aus $\{\omega_2, ..., \omega_n\}$. Wegen der Unabhängigkeit von A und B muss nun gelten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \text{ also} \\ m\epsilon &= k\epsilon \cdot (1 - (n-1)\epsilon + l\epsilon) \\ \Rightarrow m &= k + \epsilon \cdot k \cdot (-(n-1) + l) \\ \Rightarrow \epsilon &= \frac{k - m}{k \cdot (n - 1 - l)} \end{aligned}$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, dass ϵ irrational ist.

Zu (3): Analog wie (1) und (2).

Der in diesem Beispiel konstruierte Wahrscheinlichkeitsraum enthält also keine nicht trivialen, unabhängigen Ereignisse, womit die Existenz eines vollständig abhängigen endlichen Wahrscheinlichkeitsraums gezeigt ist.

2.2 Nicht diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Wie in 2.1 gesehen, gibt es also nicht triviale endliche Wahrscheinlichkeitsräume, die vollständig abhängig sind. Es kann gezeigt werden, dass dies auch für Wahrscheinlichkeitsräume mit abzählbar unendlicher Ergebnismenge gilt[3]. Es gibt also diskrete Wahrscheinlichkeitsräume[4], die keine nicht trivialen unabhängigen Ereignisse enthalten. Nun stellt sich die Frage, ob dies auch für einen nicht diskreten Wahrscheinlichkeitsraum möglich ist.
Annahme: Sei $\mathbb{P}$ ein nicht diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. es existiere eine Teilmenge $\Omega_c \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_c) > 0$, für deren Einschränkung $\mathbb{P}|_{\Omega_c}$ von $\mathbb{P}$ auf Ω_c gilt: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega_c$.
Außerdem erfülle $\mathbb{P}$ folgende Eigenschaft:

$$\forall\, \Omega_c \in \mathcal{F} \quad \exists A \in \mathcal{F} \text{ mit } A \subset \Omega_c \text{ und } 0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(\Omega_c). \tag{4}$$

Sei nun $\mathbb{P}(\Omega_c) = c$ mit $c \in (0, 1]$. Für den weiteren Beweis wird der folgende Satz verwendet.

Satz von Lyapunov[5]. *Seien $\mu_1, ..., \mu_n$ reellwertige Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$, die Eigenschaft* (4) *erfüllen. Definiere*

$$\mu(A) = (\mu_1(A), ..., \mu_n(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Dann ist μ eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathcal{F}$, deren Bildbereich eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

[3]Gelbaum, Bernard R. Independence of Events and of Random Variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 36, 333-343. Springer Verlag, 1976.
[4]Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$heißt diskret, wenn gilt: $\nexists A \in \mathcal{F}$ abz. : $\mathbb{P}(A) = 1$.
[5]Nachzulesen ist dieser beispielsweise bei Rudin, Walter. Functional Analysis. McGraw-Hill Book Company, New York, 1966, S.114

Da in unserem Fall gilt

$$\mu(A) = \mu_1(A) = \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

muss dem Satz nach für jedes beliebige $b \in (0, c]$ ein Ereignis $D \in \mathcal{F}$ existieren, sodass $\mathbb{P}(D) = b$.
Sei $p \in (0, \frac{c}{2})$ eine feste Zahl. Mit genanntem Satz können nun drei paarweise disjunkte Ereignisse D_1, D_2, D_3 gefunden werden, indem wir ihn drei Mal anwenden. Zunächst auf Ω_c: Mit der Aussage des Satzes kann ein Ereignis D_1 mit $\mathbb{P}(D_1) = p^2$ gefunden werden, sodass $D_1 \subset \Omega_c$ und $0 < \mathbb{P}(D_1) = p^2 < c = \mathbb{P}(\Omega_c)$. Analog erhält man durch Anwendung auf $\Omega_c \setminus D_1$ die Menge D_2 und schließlich auch D_3 durch Anwendung auf $\Omega_c \setminus (D_1 \cup D_2)$, sodass gilt[6]:

$$\mathbb{P}(D_1) = p^2, \quad \mathbb{P}(D_2) = p(1-p), \quad \mathbb{P}(D_3) = p(1-p)$$

Für die Vereinigung ergibt sich dann $\mathbb{P}(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = 2p - p^2 < c$. Es werden folgende zwei Ereignisse definiert:

$$A = D_1 \cup D_2 \quad \text{und} \quad B = D_1 \cup D_3$$

Dann gilt $\mathbb{P}(A) = p$ und $\mathbb{P}(B) = p$. Mit $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(D_1) = p^2$ ergibt sich:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

wobei A und B nicht triviale Ereignisse sind.
In einem nicht diskreten Wahrscheinlichkeitsraum können also immer nicht triviale, unabhängige Ereignisse gefunden werden. Ein solcher Raum kann somit nicht vollständig abhängig sein.

3 Eine stabile, aber nicht mischende Folge von Zufallsereignissen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{A_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{F}$ eine Folge von Ereignissen, sodass für jedes $B \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) = d \cdot \mathbb{P}(B),$$

wobei $d \in (0, 1)$ eine Konstante ist, die nicht von B abhängt. Dann heißt die Folge $\{A_n\}$ mischend und d heißt Dichtekoeffizient der Folge $\{A_n\}$.
Diese Eigenschaft kann wie folgt erweitert werden. Die Folge $\{A_n\}_{n \geq 1}$ von Ereignissen $A_n \in \mathcal{F}$ heißt stabile Folge von Ereignissen, wenn für jedes Ereignis $B \in \mathcal{F}$ folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) = Q(B)$$

[6] Es ist leicht nachzurechnen, dass $0 < \mathbb{P}(D_2) = p(p-1) < \mathbb{P}(\Omega_c \setminus D_1)$ und $0 < \mathbb{P}(D_3) = p(p-1) < \mathbb{P}(\Omega_c \setminus (D_1 \cup D_2))$

Es kann gezeigt werden, dass Q ein auf $\mathcal{F}$ definiertes Maß ist, das bezüglich $\mathbb{P}$ absolut stetig ist[7]. Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert die RN-Dichte

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}}(\omega) = \alpha(\omega)$$

und für jedes Ereignis $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$Q(B) = \int\limits_B \alpha \, d\mathbb{P}.$$

Aus der Ungleichung $Q(B) \leq \mathbb{P}(B)$ folgt, dass man α so wählen kann, dass $0 \leq \alpha(\omega) \leq 1$. Die Zufallsvariable $\alpha = \alpha(\omega)$ heißt Dichte der stabilen Folge von Ereignissen $\{A_n\}$. Wenn $\alpha = d$ mit $d \in (0,1)$ fast überall konstant ist, ist $\{A_n\}$ offensichtlich mischend mit Dichtekoeffizient d. Andererseits, wenn α mindestens zwei Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt, kann die stabile Folge von Ereignissen $\{A_n\}$ keine mischende Folge sein. Daher ist eine stabile Folge von Ereignissen eine Verallgemeinerung einer mischenden Folge von Ereignissen. Im nächsten Beispiel werden wir eine stabile, aber nicht mischende Folge von Ereignissen konstruieren.
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien $\Omega_1 \in \mathcal{F}$, $0 < \mathbb{P}(\Omega_1) < 1$, und $\Omega_2 = \Omega_1^c$. Betrachte außerdem die Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$, wobei für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}(A|\Omega_1) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega_1)}{\mathbb{P}(\Omega_1)}$ und $\mathbb{P}_2(A) = \mathbb{P}(A|\Omega_2) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega_2)}{\mathbb{P}(\Omega_2)}$.
Wir nehmen an, dass $\{A_n'\}$ eine mischende Folge von Ereignissen aus dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ mit Dichtekoeffizient d_1 ist und $\{A_n''\}$ eine mischende Folge von Ereignissen aus dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$ mit Dichtekoeffizient d_2, wobei $0 < d_1 < d_2 < 1$. Wir setzen $A_n = (A_n' \cap \Omega_1) \cup (A_n'' \cap \Omega_2)$.
Dann erhalten wir für jedes Ereignis $B \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n \cap B) &= \mathbb{P}[(A_n' \cap \Omega_1) \cup (A_n'' \cap \Omega_2) \cap B] \\
&= \mathbb{P}[(A_n' \cap \Omega_1 \cap B) \cup (A_n'' \cap \Omega_2 \cap B)] \\
&= \mathbb{P}(A_n' \cap \Omega_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_n'' \cap \Omega_2 \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A_n' \cap \Omega_1 \cap B) \cdot \frac{\mathbb{P}(\Omega_1)}{\mathbb{P}(\Omega_1)} + \mathbb{P}(A_n'' \cap \Omega_2 \cap B) \cdot \frac{\mathbb{P}(\Omega_2)}{\mathbb{P}(\Omega_2)} \\
&= \mathbb{P}(A_n' \cap B|\Omega_1) \cdot \mathbb{P}(\Omega_1) + \mathbb{P}(A_n'' \cap B|\Omega_2) \cdot \mathbb{P}(\Omega_2) \\
&= \mathbb{P}_1(A_n' \cap B) \cdot \mathbb{P}(\Omega_1) + \mathbb{P}_2(A_n'' \cap B) \cdot \mathbb{P}(\Omega_2).
\end{aligned}$$

Daher gilt für $Q(B) = d_1 \cdot \mathbb{P}(B \cap \Omega_1) + d_2 \cdot \mathbb{P}(B \cap \Omega_2)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) = Q(B).$$

Die Zufallsvariable $\alpha = \alpha(\omega)$ sei wie folgt definiert:

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} d_1, & \text{für } \omega \in \Omega_1, \\ d_2, & \text{für } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

[7] Rényi, A. Probability Theory. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970, S.409

Damit gilt

$$Q(B) = \int_B \alpha \, d\mathbb{P} \,.$$

Somit ist die Folge $\{A_n\}$ von Ereignissen stabil, aber nicht mischend, da ihre Dichte nicht konstant ist, sondern zwei verschiedene Werte mit positiven Wahrscheinlichkeiten annimmt.

Literatur

[1] Stoyanov, Jordan. Counterexamples in Probability, 2nd Edition. Wiley, Chichester [u.a.], 1997.

[2] Shiryaev, A. N, Transl. by R.P. Boas. Probability, 2nd Edition. Springer, New York, 1996