Seminarausarbeitung:

Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

-

„Unterschiedliche Konvergenzarten von Folgen von Zufallsvariablen “

Volker Michael Eberle

4. März 2013

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit thematisiert die unterschiedlichen Konvergenzarten die eine Folge von Zufallsvariablen besitzen kann. Anhand einiger Beispiele werden wir die unterschiedlichen Konvergenzarten einführen, und dabei feststellen, dass sich das asymptotische Verhalten einer Zufallsvariable nicht mit denen einer reellen Zahlenfolge vergleichen lässt. Deshalb haben sich in der Wahrscheinlichkeitstheorie weitere Konzepte gebildet um das asymptotische Verhalten besser erklären zu können.

2 Definition

Im Weiteren betrachten wir, falls nichts anderes angegeben ist, sowohl eine Zufallsvariable X als auch eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n, n \geq 1\}$, welche auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind.
Um sich mit den unterschiedlichen Konvergenzarten befassen zu können ist es unausweichlich die vier wichtigsten Konvergenzarten einzuführen.

2.1 Fast sichere Konvergenz

Man sagt eine Zufallsvariable X_n konvergiert fast sicher gegen X, falls:

$$\mathcal{P}[\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1 \tag{1}$$

2.2 Konvergent in Wahrscheinlichkeit

Die Folge X_n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen X, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}[\omega : |X_n(\omega) - X[\omega)| \geq \varepsilon] = 0 \tag{2}$$

2.3 Konvergent in Verteilung

Eine Folge von Zufallsvariablen konvergiert in Verteilung, falls für die Verteilungsfunktionen von X bzw. X_n gilt:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x) \tag{3}$$

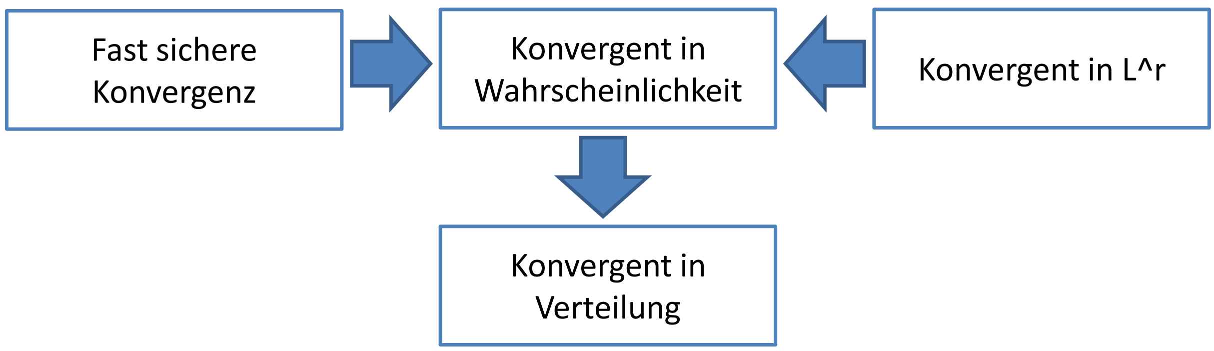
Wobei F_n bzw. F die Verteilungsfunktionen von X_n bzw. X, und die x Stetigkeitspunkte sind.

2.4 Konvergent im $\mathcal{L}^r$

Seien X_n, X $\in$ $\mathcal{L}^r$ $r \geq 1$. Dann konvergiert die Folge X_n gegen X im $\mathcal{L}^r$-Sinn, falls gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^r\right] = 0 \tag{4}$$

Da wir jetzt die Bedingungen einiger Konvergenzarten kennen, wollen wir uns nun mit den Beziehungen die zwischen den Konvergenzarten bestehen befassen, und die Gegenrichtung widerlegen.



3 Gegenbeispiele

Anhand dieses Schaubild erkennt man, dass Konvergent in Verteilung die schwächste Form der Konvergenz ist.

Diese, und die anderen Implikationen wollen wir in den folgenden Gegenbeispielen diskutieren.

3.1 Konvergent in Verteilung vs. Konvergent in Wahrscheinlichkeit

Sei X eine symmetrische Zufallsvariable (z.B $\mathcal{N}(0,1)$), und X_n=-X. Dann folgt aus der Symmetrie von X, dass $X_n \xrightarrow{d} X$.

Jedoch folgt mit der Definition Konvergent in Wahrscheinlichkeit dass:

$$\mathcal{P}\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] \overset{X_n \equiv -X}{=} \mathcal{P}\left[2\,|X| > \varepsilon\right] = \mathcal{P}\left[|X| > \frac{1}{2}\varepsilon\right] \nrightarrow 0$$

Daher ist die Bedingung Konvergent in Wahrscheinlichkeit nicht erfüllt.

3.2 Konvergent in Wahrscheinlichkeit vs. Fast sicher Konvergent

Seien $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ und $\mathcal{P}$ das Lebesgue-Maß, außerdem seien n, m und k $\in \mathbb{N}$. Wobei m ≥ 0 und $0 \leq$ k $\leq 2^m - 1$, sodass $n = 2^m + k$. A_n definiert eine Folge von Ereignissen mit folgender Darstellung $A_n = [k2^{-m}, (k+1)2^{-m})$, wodurch die Zufallsvariablen $X_n(\omega)$=$1_{A_n}(\omega)$ definiert werden. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeiten von X_n

$$\mathcal{P}\left[|X_n| \geq \varepsilon\right] = \begin{cases} 2^{-m} & \text{falls} \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \\ 0 & \text{falls} \quad 1 \leq \varepsilon \end{cases} .$$

Wenn nun n$\to \infty \Rightarrow$ m $\to \infty \Rightarrow 2^{-m} \to 0$ also gilt $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Kleines Zahlenbeispiel:

Seien n=5, m=2 und k=1 und $A_5 = [0.25; 0.5]$

Folglich gilt für die Wahrscheinlichkeit von $X_n = \frac{|A_5|}{\Omega} = \frac{0.25}{1} = 0.25 = 2^{-2} = 2^{-m}$

Nun wollen wir zeigen, dass X_n nicht fast sicher konvergiert.

Um dies zu zeigen ist es hinreichend, dass es unendlich viele $X_n(\omega) = 1$ und unendlich viele $X_n(\omega) = 0$ gibt. Sei dazu $\omega \in [k2^{-m}, (k+1)2^{-m})$ mit k= $0, 1, \ldots, 2^m - 1$. Dann kann man durch geeignete Wahl von k ereichen, dass ω sowohl in A_n als auch in $\Omega \setminus A_n$ liegt, und somit keinen Grenzwert besitzt.

Der $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1$ aber der $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$. Folglich ist die Fast sichere Konvergenz von X_n nicht erfüllt.

3.3 Konvergent in Wahrscheinlichkeit vs. Konvergent im $\mathcal{L}^r$

Betrachten wir hierfür die Cauchyverteilung die folgende Dichte besitzt:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$$

$$\mathcal{P}\left[|X_n| \geq \varepsilon\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)dx$$

Desweiteren gilt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx &= 2\int_0^{\infty} \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}dx \overset{y=nx}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{n}{(1+y^2)n}dy \\
&= \frac{2}{\pi}\arctan(\infty) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \\
\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)dx &= 2\int_0^{\varepsilon} \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}dx \overset{y=nx}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{n\varepsilon} \frac{n}{(1+y^2)n}dy \\
&= \frac{2}{\pi}\arctan(\mathrm{y})\,\Big|_0^{n\varepsilon} = \frac{2}{\pi}\arctan(n\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1
\end{aligned}$$

Also gilt für:

$$\mathcal{P}\left[|X_n| \geq \varepsilon\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist erfüllt, aber was ist mit der Konvergenz in $\mathcal{L}^r$?

Sei hier $r = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_n|\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n|x|}{\pi(1+(nx)^2)}dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{nx}{\pi(1+(nx)^2)}1_{\{x\leq 0\}}(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nx}{\pi(1+(nx)^2)}1_{\{x\geq 0\}}(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \frac{nx}{\pi(1+(nx)^2)}dx + \int_0^{\infty} \frac{nx}{\pi(1+(nx)^2)} \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{nx}{\pi(1+(nx)^2)}dx \overset{y=1+(xn)^2}{=} 2\int_1^{\infty} \frac{nx}{\pi y 2xn^2}dy = \frac{1}{\pi n}\int_1^{\infty} \frac{1}{y}dy \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[log(y)\right]_1^{\infty} = \frac{1}{\pi n}\left[log(1+(xn)^2)\right]_0^{\infty} = \infty
\end{aligned}$$

Aber kann man aus der Divergenz für r=1, auch auf die Divergenz von r≥1 schließen?

Ja wie folgender Beweis zeigen wird.

Um diesen Beweis führen zu können müssen wir die Konvexität der Exponentialfunktion und die Hölder-Ungleichung verwenden. Dann gilt $\forall$ x,y $\in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$ und p,q>1

$$\begin{gathered}\exp((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)\exp(x)+\lambda\exp(y)\\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}AB &= (A^p)^{\frac{1}{p}}(B^q)^{\frac{1}{q}} = \exp(\log(A^p)^{\frac{1}{p}})\exp(\log(B^q)^{\frac{1}{q}})\\ &= \exp(\log(A^p)^{\frac{1}{p}}+\log(B^q)^{\frac{1}{q}}) = \exp\left(\frac{1}{p}\log(A^p)+\frac{1}{q}\log(B^q)\right)\\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\log(A^p))+\frac{1}{q}\exp(\log(B^q))\\ &= \frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}\end{aligned}$$

Setzen wir nun für A und B folgendes ein dann ergibt sich:

$$\begin{gathered}A=\frac{|X|}{(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}} \text{ und } B=\frac{|Y|}{(\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}\\ \frac{|XY|}{(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|X|^p}{p(\mathbb{E}|X|^p)}+\frac{|Y|^q}{q(\mathbb{E}|Y|^q)}\\ \frac{\mathbb{E}|XY|}{(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{p(\mathbb{E}|X|^p)}+\frac{\mathbb{E}(|Y|^q)}{q(\mathbb{E}|Y|^q)}\\ \frac{\mathbb{E}|XY|}{(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1\\ \rightarrow \mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}\end{gathered}$$

Für $s<r$, X= |X|^s, p= $\frac{r}{s}$ und Y=1 folgt:

$$\mathbb{E}(|X|^s) \leq (\mathbb{E}|X|^{sp})^{\frac{1}{p}} = (\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{s}{r}}$$

Also folgt aus der Divergenz von $\mathbb{E}|X|$ automatisch auch die Divergenz von $\mathbb{E}|X|^r$. Wobei r$\geq$1 ist.

3.4 Konvergent im $\mathcal{L}^r$ vs. Fast sicher Konvergent

Sei dazu X_n eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $n \geq 1$ mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$\mathcal{P}(X_n = n^{1/(2r)}) = \frac{1}{n}, \quad \mathcal{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$

Wir zeigen zuerst, die Konvegenz im $\mathcal{L}^r$:

$$\mathbb{E}\left[X_n^r\right] = (n^{\frac{1}{2r}})^r \frac{1}{n} = n^{-\frac{1}{2}} \to 0$$

Fast sicher Konvegent:

Man definiere die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n = 0$ mit folgendem Ereignis

$$A_k = \{\omega \in \Omega | X_n(\omega) = 0 \quad \forall\ n \geq k\}$$

Da die Zufallsvariablen unabhängig sind kann man A_k auch wie folgt schreiben für $N > k$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A_k) &= \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega | X_n(\omega) = 0 \quad \forall\ k \leq n \leq N\}) = \prod_{n=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)\left(\frac{k+2-1}{k+2}\right)\cdots \\
&= \frac{k-1}{N}
\end{aligned}$$

Wenn nun N $\to \infty$ dann folgt, dass $\frac{k-1}{N} \to 0$ und damit ist die Fast sichere Konvergenz nicht erfüllt.

Um das nächste Gegenbeispiel verständlich darstellen zu können benötigen wir das Lemma von Borel Cantelli welches wir an dieser Stelle kurz einführen werden.

3.5 Lemma von Borel Cantelli

Falls X_n eine Folge von Ereignissen ist und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}[|X_n| > \varepsilon] < \infty$$

dann folgt:

$$\mathcal{P}(\sup(X_n)) = 0.$$

Beweis:

$$\limsup A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\ \ B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$\Rightarrow \mathcal{P}(B) \leq \mathcal{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k) < \infty$$

Da nach Vorausetzung die Reihe$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k)$ konvergiert bedeutet, dass ab einem n die $\sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{P}(A_k) = 0$ ist. Mit $B = \limsup A_k$ folgt dann die Behauptung.

3.6 Fast sicher konvergent vs. Konvergent im $\mathcal{L}^r$

Sei dazu X_n eine Folge von Zufallsvariablen:
$\mathcal{P}(X_n = e^n) = n^{-2}$ und $\mathcal{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^{-2}}$
Wir benutzen das Lemma von Borel Cantelli

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[|X_n| > \varepsilon] = \mathcal{P}[X_n = e^n] = \frac{1}{n^2} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}[|X_n| > \varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{N} < \infty\end{aligned}$$

D.h die X_n konvergieren fast sicher gegen 0. Jedoch konvergieren die X_n nicht im $\mathcal{L}^r$ Sinne :

$$\mathbb{E}[|X_n|^r] = \frac{e^{nr}}{n^2} \overset{L'Hospital}{=} \frac{re^{rn}}{2n} \overset{L'Hospital}{=} \frac{r^2 e^{rn}}{2} \to \infty$$

Die letzten zwei Gegenbeispiele haben eine besondere Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie inne. Wie gezeigt-kann man nämlich keinerlei Rückschlüsse weder von der Konvergenz im $\mathcal{L}^r$ auf Fast sicher konvergent, noch von Fast sicher konvergent auf Konvergenz im $\mathcal{L}^r$ ziehen.

3.7 Summen die in Verteilung konvergieren

Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass Zufallsvariablen X_n, Y_n, die in Verteilung gegen X bzw. Y konvergieren, noch nicht sicherstellt, dass auch die Summe $X_n + Y_n$ gegen $X + Y$ konvergiert.

Seien dazu X_n und Y_n Zufallsvariablen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$\mathcal{P}(X_n = 0) = \mathcal{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ und $Y_n = 1 - X_n$.

Dann folgt durch die Konstruktion von X_n und Y_n, dass die Summe identisch 1 ist. Dies ist aber für die Summe von X+Y nicht richtig. Denn hier gilt:

$\mathcal{P}(X + Y = 0) = \mathcal{P}(X + Y = 2) = \frac{1}{4}$ und $\mathcal{P}(X + Y = 1) = \frac{1}{2}$