Ausarbeitung zum Seminarthema „Klassen von Zufallsereignissen und Unabhängigkeit von Zufallsereignissen“

Anil Aslaner

4. März 2013

1 Vorwort

Diese Ausarbeitung ist im Wintersemester 2012/2013 im Rahmen des Seminars “Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie“ am Institut für Stochastik an der Universität Ulm entstanden. Die zwei Themen meiner Ausarbeitung sind verschiedene Klassen von Zufallsereignissen, deren Eigenschaften und die Unabhängigkeit von Zufallsereignissen, wobei hier der Schwerpunkt auf letzterem liegt, zumal das erste Thema bereits zum größten Teil in meiner Präsentation behandelt wurde.

2 Klassen von Zufallsereignissen

2.1 Definition

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathscr{P}(\Omega)$:=$\{$A | A Teilmenge von $\Omega\}$ die Potenzmenge von Ω.
Dann heißt $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ eine *σ-Algebra*, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$

(ii) $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

2.2 Definition

Sei Ω eine beliebige Menge. Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt *co-abzählbar*, falls A^c abzählbar ist.

2.3 Korollar

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathscr{F}$=$\{A \subset \Omega$ | A abzählbar oder co-abzählbar$\}$ =
= $\{A \subset \Omega$ | A abzählbar oder A^c abzählbar$\}$.
Dann ist $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra auf Ω.

<u>**Beweis.**</u>

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$, weil $\Omega^c = \emptyset$ abzählbar ist.

(ii) Sei $A \in \mathscr{F} \Rightarrow$ A abzählbar oder A^c abzählbar $\Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$, weil $(A^c)^c = A$.

(iii) Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$. Wir zeigen, dass die unendliche Vereinigung der Ereignisse ebenfalls messbar ist, d.h. ein Element der σ-Algebra $\mathscr{F}$ ist. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle:
1.Fall: $A_1, A_2, \dots$ alle abzählbar
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ abzählbar $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

2.Fall: Es gibt mindestens ein überabzählbares Ereignis aus Ω,d.h. $\exists i_0 \in \{1, 2, \dots\}$: A_{i_0} nicht abzählbar $\Rightarrow A_{i_0}^c$ abzählbar

Es folgt: $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_{i_0}^c$, und somit ist $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$ als Teilmenge einer abzählbaren Menge wiederum abzählbar, d.h. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

$\Rightarrow \mathscr{F}$ ist eine σ-Algebra auf Ω.

2.4 Bemerkung

Es ist klar, dass eine nicht-triviale σ-Algebra $\mathscr{F}$ auf Ω im Allgemeinen nicht alle Teilmengen der Grundmenge enthält. Sei hierzu Ω eine überabzählbare Menge, z.B. $\Omega = \mathbb{R}$. Wähle $A \subset \Omega$, sodass A und A^c überabzählbar sind, z.B. $A := (-\infty, 0)$ mit $A^c = [0, \infty)$. Die σ-Algebra $\mathscr{F}$ auf Ω, die im Korollar 2.3 konstruiert wurde, enthält die Teilmenge A nicht, weil A weder abzählbar noch co-abzählbar ist.

3 Unabhängigkeit von Zufallsereignissen

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ stets ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Wir geben zunächst einige grundlegende Definitionen zur Unabhängigkeit von zufälligen Ereignissen an.

3.1 Definition

(i) Ereignisse $A \in \mathscr{F}$ und $B \in \mathscr{F}$ heißen *unabhängig*, falls gilt:
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(ii) Zwei Mengensysteme $\mathscr{F}$ und $\mathscr{B}$ heißen *unabhängig*, falls gilt:
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ für alle $A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{B}$

(iii) $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{F}$ heißen *(gemeinsam) unabhängig*, falls gilt:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}), \tag{1}$$

für alle $k = 2, \dots, n$ und $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, n \in \mathbb{N}$.
Folglich müssen alle $2^n - n - 1$ Bedingungen in (1) erfüllt sein, damit die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ (gemeinsam) unabhängig sind. Die Anzahl der Bedingungen ergibt sich aus der Potenzmenge einer n-elementigen Menge, hier $\{A_1, \dots, A_n\}$. Die Mächtigkeit dieser Menge ist 2^n. Da $k \in \{2, \dots, n\}$, schließen wir die leere Menge und die einelementigen Mengen $\{A_k\}$, $k = 1, \dots, n$, aus, d.h. von 2^n werden n+1 abgezogen, um alle übrigen Möglichkeiten zu berücksichtigen. Falls mindestens eine Relation nicht gilt, heißen die Ereignisse *abhängig.* Falls (1) nur für $k = 2$ gilt, heißen $A_1, \dots, A_n$ *paarweise unabhängig.*

Die paarweise Unabhängigkeit ist gemäß Definition 3.1 ein Spezialfall der (gemeinsamen) Unabhängigkeit. Es stellt sich somit die Frage, ob (umgekehrt) die paarweise Unabhängigkeit von Ereignissen hinreichend ist für deren gemeinsame Unabhängigkeit. Folgendes Beispiel zeigt, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist.

3.2 Beispiel

Seien A_1, A_2, A_3 unabhängige Ereignisse mit: $P(A_j) = \frac{1}{2}$, für alle $j = 1, 2, 3$. Weiterhin seien $A_{ij} := (A_i \triangle A_j)^c$, für alle $1 \leq i < j \leq 3$, wobei die symmetrische Differenz zweier Ereignisse A und B folgendermaßen definiert ist: $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
Wir behaupten, dass die Ereignisse A_{12}, A_{13}, A_{23} paarweise unabhängig sind. Zeigen wir dies nur für A_{12} und A_{13}, da für die anderen zwei Fälle das Vorgehen analog ist. Zu zeigen ist:

$$P(A_{12} \cap A_{13}) = P(A_{12})P(A_{13}). \tag{2}$$

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wissen wir: $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.
Und somit gilt für die rechte Seite von (2):
$P(A_{12})P(A_{13}) = P((A_1 \triangle A_2)^c)P((A_1 \triangle A_3)^c) = (1 - P(A_1 \triangle A_2))(1 - P(A_1 \triangle A_3)) =$
$\overset{WR}{=} [1 - (P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1 \cap A_2))][1 - (P(A_1) + P(A_3) - 2P(A_1 \cap A_3))] \overset{A_i unabh.}{=}$
$= (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Berechnen wir die linke Seite von (2):
$P(A_{12} \cap A_{13}) = P((A_1 \triangle A_2)^c \cap (A_1 \triangle A_3)^c) = P((A_1 \triangle A_2) \cup (A_1 \triangle A_3))^c =$
$= 1 - P((A_1 \triangle A_2) \cup (A_1 \triangle A_3)) = 1 - (P(A_1 \triangle A_2) + P(A_1 \triangle A_3) - P((A_1 \triangle A_2) \cap (A_1 \triangle A_3)))$.

Es gilt $P(A_1 \triangle A_2) = P((A_1 \cup A_2) \backslash (A_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cup A_2) - P(A_1 \cap A_2) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
Offensichtlich gilt auch $P(A_1 \triangle A_3) = P(A_2 \triangle A_3) = \frac{1}{2}$.
Es bleibt zu berechnen: $P((A_1 \triangle A_2) \cap (A_1 \triangle A_3))$. Hierzu hilft uns Abbildung 1.

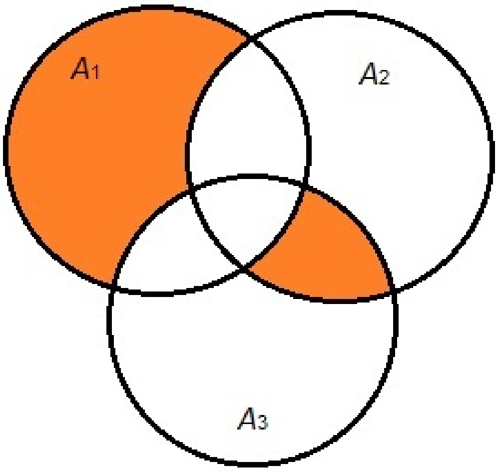

Abbildung 1: Die gefärbte Fläche entspricht $(A_1 \triangle A_2) \cap (A_1 \triangle A_3)$

Es gilt somit:
$(A_1 \triangle A_2) \cap (A_1 \triangle A_3) = \underbrace{A_1 \backslash ((A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2))}_{=:B} \cup \underbrace{(A_3 \cap A_2) \backslash (A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{=:C}$.
Offensichtlich sind B und C disjunkt und für die Wahrscheinlichkeiten gelten:

$P(B) = P(A_1) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2)) = \frac{1}{2} - (P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2) -$
$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \overset{A_i unabh.}{=} \frac{1}{2} - (\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

$P(C) = P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow P((A_1 \triangle A_2) \cap (A_1 \triangle A_3)) = P(B) + P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Insgesamt folgt also $P(A_{12} \cap A_{13}) = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ und (2) ist erfüllt. Analog zeigt man dies für die anderen zwei Fälle.Es gilt also, dass A_{12}, A_{13}, A_{23} paarweise unabhängig sind. Betrachten wir nun:

$$P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) \overset{?}{=} P(A_{12})P(A_{13})P(A_{23})$$

$P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) = P((A_1 \triangle A_2)^c \cap (A_1 \triangle A_3)^c \cap (A_2 \triangle A_3)^c) =$
$= P((A_1 \triangle A_2) \cup (A_1 \triangle A_3) \cup (A_2 \triangle A_3))^c = 1 - P(\underbrace{(A_1 \triangle A_2) \cup (A_1 \triangle A_3)}_{=:D} \cup (A_2 \triangle A_3)) =$

$= 1 - (P(D) + P(A_2 \triangle A_3) - P(D \cap (A_2 \triangle A_3)) \overset{(\star)}{=} 1 - (\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_{12})P(A_{13})P(A_{23})$.
$(\star)\ :\ P(D) = P(A_1 \triangle A_2) + P(A_1 \triangle A_3) - P(\underbrace{(A_1 \triangle A_2) \cap (A_1 \triangle A_3)}_{Abb.1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$D \cap (A_2 \triangle A_3) = A_2 \triangle A_3$ (siehe Abbildung 2).

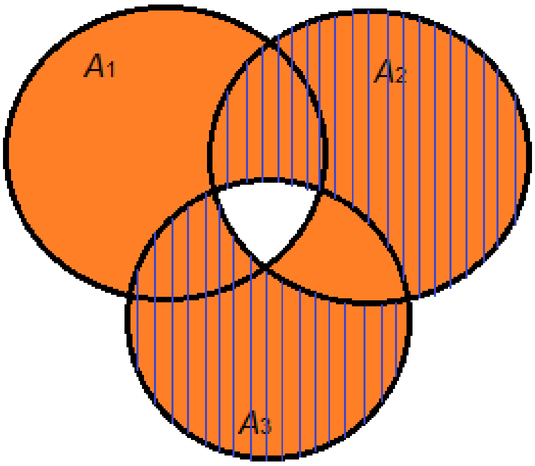

Abbildung 2: $D = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \backslash (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$-gefärbte Menge
$A_2 \triangle A_3$-gestrichelte Menge

3.3 Definition

Seien $A, B \in \mathscr{F}$,wobei $P(B) > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter der Bedingung B ist gegeben durch:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Das nun folgende Beispiel zeigt auf, dass von $n+1$ abhängigen Ereignissen n beliebige (gemeinsam) unabhängig sein können.

3.4 Beispiel

Eine faire Münze wird n mal unabhängig voneinander geworfen. Wir betrachten die Ereignisse A_k ={'Kopf beim k-ten Wurf'}, $k = 1, \dots, n$ und
B_{n+1} ={'Anzahl von Kopf bei den n Würfen ist gerade'}.

Es gilt offensichtlich: $P(A_1) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{2}$.
Wir behaupten, dass: $P(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ und zeigen dies per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:
Zunächst definieren wir $X_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(A_k)$. Es gilt also $P(B_{n+1}) = P($'X_n ist gerade'$)$.
Induktionsanfang mit $n = 1$:
$B_{1+1} = B_2$ ={'Anzahl von Kopf bei einem Wurf ist gerade'}={'0 mal Kopf bei einem Wurf'}={'Zahl bei einem Wurf'}. Somit $P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Induktionshypothese: $P(B_{n+1}) = P('X_n \text{ ist gerade'}) = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt $n \to n+1$:
$P(B_{n+2}) = P('X_{n+1}$ ist gerade')=P('$X_n + \mathbb{1}(A_{n+1})$ gerade')=
=P('X_n gerade', '$\mathbb{1}(A_{n+1})$ gerade')+P('X_n ungerade', '$\mathbb{1}(A_{n+1})$ ungerade')$\overset{A_k unabh}{=}$
=P('X_n gerade')P('$\mathbb{1}(A_{n+1})$ gerade')+P('X_n ungerade')P('$\mathbb{1}(A_{n+1})$ ungerade')$\overset{IH}{=}$
$= \frac{1}{2}P(\mathbb{1}(A_{n+1}) = 0) + (1 - \frac{1}{2})P(\mathbb{1}(A_{n+1}) = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Weiter gilt:

$$P(B_{n+1}|A_1 \cap \dots \cap A_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls n gerade,} \\ 0, & \text{falls n ungerade.} \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass

$$P(A_1 \cap \dots A_n \cap B_{n+1}) = P(B_{n+1}|A_1 \cap \dots \cap A_n)P(A_1 \cap \dots \cap A_n) =$$

$$= \begin{cases} 2^{-n}, & \text{falls n gerade,} \\ 0, & \text{falls n ungerade.} \end{cases} \neq 2^{-(n+1)} = P(A_1)\dots P(A_n)P(B_{n+1})$$

Das heißt, dass die Ereignisse $A_1, \dots, A_n, B_{n+1}$ abhängig sind.
Wir betrachten nun n beliebige Ereignisse, wobei B_{n+1} eines davon ist. (Der Fall $A_1, \dots, A_n$ ist trivial, da diese Ereignisse unabhängig sind). ObdA wählen wir $A_2, A_3, \dots, A_n, B_{n+1}$. Seien $1 \le m \le n-1$ und $2 \le i_1 < \dots < i_m \le n$. Es gilt

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \cap B_{n+1}) = P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m})P(B_{n+1}|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = 2^{-m}2^{-1} =$$
$$= 2^{-(m+1)} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{m+1-mal} = P(A_{i_1})\dots P(A_{i_m})P(B_{n+1})$$

Somit folgt die (gemeinsame) Unabhängigkeit von $A_2, A_3, \dots, A_n, B_{n+1}$.

3.5 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen die folgenden Bedingungen *Unabhängigkeits-Typ-Bedingungen*:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_k), k = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

Als nächstes betrachten wir zwei Beispiele, die uns verdeutlichen werden, dass die Unabhängigkeit von Zufallsereignissen auf verschiedenen Ebenen ungewöhnliche Eigenschaften aufweisen. Der Begriff “ Unabhängigkeit auf einer Ebene k “ ist hier gemäß unserer späteren Definition 3.5 als eine Unabhängigkeits-Typ-Bedingung für ein k $\in \{1, \ldots, n\}$ zu verstehen.

3.6 Beispiel

(i) Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Grundraum mit folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p_i := P(\{i\}), i \in \Omega$:
$p_1 = \frac{1}{16}, p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{7}{48}, p_6 = \frac{17}{48}$.
Seien $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, A_2 = \{1, 2, 3, 5\}, A_3 = \{1, 2, 4, 5\}, A_4 = \{1, 3, 4, 5\}$
die zu betrachtenden Ereignisse.
Es folgt offensichtlich für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse:

$$P(A_i) = \tfrac{1}{2}, \text{ für alle } i = 1, \ldots, 4.$$

Weiterhin gilt:

$P(A_i \cap A_j) = \frac{17}{48}$ für alle $i < j$, $P(A_i \cap A_j \cap A_l) = \frac{5}{24}$ für alle $i < j < l$ und $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{16}$
$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$
Die Faktorisierung der Wahrscheinlichkeit erfolgt nur für vier Ereignisse und somit zeigt dieses Beispiel, dass die Unabhängigkeit auf einer gewissen Ebene nicht die Unabhängigkeit von Ereignissen auf den niederigeren Ebenen impliziert.

Bei der Untersuchung von zufälligen Ereignissen auf ihre Unabhängigkeit gibt es auch Fälle, in denen sich die Abhängigkeit von Ereignissen auf den verschiedenen Ebenen abwechseln kann, sodass man im Allgemeinen keine klare Aussage treffen kann:

(ii) Sei $\Omega = \{1, \ldots, 12\}$ mit folgenden Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse:
$p_1 = \frac{1}{16}, p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{24}, p_i = \frac{5}{48}$ für $i \in \{6, \ldots, 11\}$ und $p_{12} = \frac{7}{48}$.
Wir betrachten folgende Ereignisse
$B_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}, B_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10\}, B_3 = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$,
$B_4 = \{1, 3, 4, 5, 8, 10, 11\}$. Es gilt:
$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{5}{48} = \frac{1}{2}$
$P(B_i \cap B_j) = \frac{1}{4}$ für alle $i < j, P(B_i \cap B_j \cap B_l) = \frac{5}{48}$ für alle $i < j < l$ und $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = \frac{1}{16}$
Es folgt die Unabhängigkeit von $B_1, \ldots, B_4$ auf den Ebenen 2 und 4. Auf der Ebene 3 sind sie dagegen abhängig.

3.7 Definition

Zufällige Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ heißen *bedingt unabhängig (gegeben $B \in \mathscr{F}$ mit $P(B) > 0$)*, falls:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n | B) = P(A_1|B)P(A_2|B) \dots P(A_n|B)$$

.

Wir fragen uns, ob ein Zusammenhang zwischen bedingter Unabhängigkeit und der ursprünglich definierten Unabhängigkeit von Zufallsereignissen besteht.

3.8 Beispiel

(i) Wir nehmen an, es gibt zwei Münzen a und b. Seien p_a =P('Kopf mit Münze a') und p_b =P('Kopf mit Münze b'), $p_a \neq p_b$. Eine Münze wird zufällig ausgewählt und zweimal geworfen. Wir betrachten:
$A_1 =${'Kopf beim ersten Wurf'}
$A_2 =${'Kopf beim zweiten Wurf'}
$B =${'Münze a ist ausgewählt}.
$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2|B) = p_a^2 = p_a p_a = P(A_1|B)P(A_2|B)$. Folglich sind A_1 und A_2 bedingt unabhängig. Weiterhin gilt:
$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}(p_a^2 + p_b^2), P(A_1) = \frac{1}{2}(p_a + p_b) = P(A_2)$
$p_a \neq p_b \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$. Daher sind die beiden Ereignisse A_1 und A_2 abhängig gemäß Definition 3.1.

(ii) Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Betrachten wir die Ereignisse:
$A_k =${'Kopf beim k-ten Wurf'}, $k = 1, 2$ und $B =${'mindestens einmal Zahl'}.
Dann gilt: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ und $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$. Und somit folgt die Unabhängigkeit von A_1, A_2.
Bei Betrachtung der bedingten Wahrscheinlichkeit von A_1 bzw. A_2 unter B erkennen wir:
$P(A_1|B) = P(A_2|B) = \frac{1}{4}$. Wegen $P(A_1 \cap A_2|B) = 0$ sind die Ereignisse nicht bedingt unabhängig gegeben B.

<u>Ergebnis</u>

Es gibt keinen Zusammenhang zwischen der (gemeinsamen) Unabhängigkeit und der bedingten Unabhängigkeit von Zufallsereignissen.

Wir schauen uns nun an, ob aus (3) (siehe Definition 3.5) die gemeinsame Unabhängigkeit von n Ereignissen folgt, wobei $n \geq 3$ (da für n=2 dies bereits die Definition der Unabhängigkeit ist). Folgendes Beispiel verneint diese Vermutung. Dies liegt nahe, da (3) eine schwächere Bedingung ist als die Bedingungen für die gemeinsame Unabhängigkeit zufälliger Ereignisse.

3.9 Beispiel

Angenommen wir betrachten die drei zufälligen Ereignisse A_1, A_2, A_3 auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit den Eigenschaften:
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \frac{1}{8}, \qquad P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} - \epsilon$
$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) = \frac{1}{8} + \epsilon, P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = \frac{1}{8} + 2\epsilon,$
$P(A_1^c \cap A_2^2 \cap A_3^c) = \frac{1}{8} - 2\epsilon$, wobei $\epsilon \in (0, \frac{1}{6}]$.
Die Bedingungen in (3) sind erfüllt, weil:
$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}, P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}, P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8}$. Wir können aber leicht sehen, dass A_1, A_2, A_3 abhängig sind:
$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} - \epsilon \neq \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$.
Wir sehen somit, dass die Unabhängigkeits-Typ-Bedingungen nicht hinreichend sind für die gemeinsame Unabhängigkeit zufälliger Ereignisse.

Literatur

[1] Spodarev, Evgeny. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Vorlesungsskript. Universität Ulm (2011)

[2] Spodarev, Evgeny. Stochastik I, Vorlesungsskript. Universität Ulm (2009)

[3] Stoyanov, Jordan. Counterexamples in Probability, 2nd Edition. Wiley, Chichester [u.a.] 1997.