Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie - Diskrete Martingale

Alexander Nerlich | Januar 2013 | Institut für Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Definition - Filtration

Sei (Ω, Σ, P) hier und im Folgenden stets ein Wkt.-Raum. Eine Folge von Sigma-Algebren $(\Sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ heißt Filtration, falls

$$\Sigma_s \subset \Sigma_t \subset \Sigma \quad \forall\, s \leq t$$

gilt.

Bemerkung

Sind beispielsweise X, Y Zufallsvariablen, welche über dem Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, Σ, P) definiert sind, so werden wir hier und im folgenden $X = Y$ schreiben, auch wenn lediglich $X \overset{f.s.}{=} Y$ gemeint ist. Dies ist sinnvoll, da beispielsweise die bedingte Erwartung, welche im folgenden sehr oft verwendet wird, eine Zufallsvariable ist, welche lediglich fast sicher eindeutig und nicht eindeutig bestimmt ist.

Definition - Martingal

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ Martingal, falls die nachfolgenden 3 Eigenschaften gelten.

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bezüglich $(\Sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ adaptiert, d.h. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist X_n Σ_n-messbar.
2. Es gilt $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
3. Es gilt $\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) = X_m$ für jedes $m \leq n$.

Definition - Martingal

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ Martingal, falls die nachfolgenden 3 Eigenschaften gelten.

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bezüglich $(\Sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ adaptiert, d.h. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist X_n Σ_n-messbar.
2. Es gilt $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
3. Es gilt $\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) = X_m$ für jedes $m \leq n$.

Definition - Martingal

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n\in\mathbb{N})$ Martingal, falls die nachfolgenden 3 Eigenschaften gelten.

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bezüglich $(\Sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ adaptiert, d.h. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist X_n Σ_n-messbar.
2. Es gilt $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für jedes $n\in\mathbb{N}$.
3. Es gilt $\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) = X_m$ für jedes $m \leq n$.

Definition - Beschränktheit, Dominiertheit

Sei $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal. Dieses heißt L^1-beschränkt, falls

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$$

gilt und L^1-dominiert, falls

$$\mathbb{E} \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| < \infty$$

gilt.

Definition - Beschränktheit, Dominiertheit

Sei $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal. Dieses heißt L^1-beschränkt, falls

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$$

gilt und L^1-dominiert, falls

$$\mathbb{E} \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| < \infty$$

gilt.

Beispiel 1 - Beschränktheit impliziert Dominiertheit nicht

Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $P(\{n\}) := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Σ sei die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Betrachtet man die Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, mit $X_n(\omega) := (n+1)\mathbf{1}_{[n+1,\infty)}(\omega)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\Sigma_n := \sigma(\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, \{[n+1, \infty) \cap \mathbb{N}\})$, so gelten alle drei nachfolgenden Behauptungen.

1. $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist.
2. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$.
3. $\mathbb{E} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |X_n| = \infty$.

Beweis - Martingaleigenschaften

Die Adaptiertheit ist trivial.
Das der Erwartungswert endlich ist, wird sich aus dem 2. Punkt ergeben.
Die letzte Martingaleigenschaft folgt aus nachfolgender Überlegung.

Beweis - Martingaleigenschaften

$\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1})$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_n|\{j\})\mathbb{1}_{\{j\}}(\omega) + \mathbb{E}(X_n|[n,\infty)\cap\mathbb{N})\mathbb{1}_{[,n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{\{j\}})}{P(\{j\})}\mathbb{1}_{\{j\}}(\omega) + \frac{\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}})}{P([n,\infty)\cap\mathbb{N}))})\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&= \frac{\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}})}{P([n,\infty)\cap\mathbb{N}))})\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&= n\mathbb{1}_{[n,\infty)\cap\mathbb{N}}(\omega) \\
&= X_{n-1}
\end{aligned}
$$

Beweis - Beschränktheit, Nicht Dominiertheit

Es gilt offensichtlich $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n)$, wodurch aus

$$\mathbb{E}(X_n) = (n+1)P(X_n = n+1) = (n+1)P([n+1,\infty)) = 1$$

folgt, dass das Martingal beschränkt ist.

Ferner gilt, dass

$$\mathbb{E}(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \mathbb{E}Id = \sum_{k=1}^{\infty} kP(Id = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$$

ist, womit das Martingal nicht dominiert ist.

Beweis - Beschränktheit, Nicht Dominiertheit

Es gilt offensichtlich $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n)$, wodurch aus

$$\mathbb{E}(X_n) = (n+1)P(X_n = n+1) = (n+1)P([n+1,\infty)) = 1$$

folgt, dass das Martingal beschränkt ist.
Ferner gilt, dass

$$\mathbb{E}(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \mathbb{E}Id = \sum_{k=1}^{\infty} kP(Id = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$$

ist, womit das Martingal nicht dominiert ist.

Übersicht

- Grundlagen
- **Martingalähnliche Begriffe**
- Martingalkonvergenz und Martingalungleichungen

Definition - Martingal im Grenzwert, Eventuelles Martingal

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration bzgl. der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$

Martingal im Grenzwert, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |\mathbb{E}(X_m|\Sigma_n) - X_n| \overset{f.s.}{=} 0$$

gilt und eventuelles Martingal, falls

$$P(\mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n) \neq X_n \; u.o.) = 0$$

gilt. (Wobei die Abkürzung „u.o.“ hierbei für „unendlich oft“ steht.)

Definition - Martingal im Grenzwert, Eventuelles Martingal

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration bzgl. der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$

Martingal im Grenzwert, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |\mathbb{E}(X_m|\Sigma_n) - X_n| \overset{f.s.}{=} 0$$

gilt und eventuelles Martingal, falls

$$P(\mathbb{E}(X_{n+1}|\Sigma_n) \neq X_n \; u.o.) = 0$$

gilt. (Wobei die Abkürzung „u.o.“ hierbei für „unendlich oft“ steht.)

Beispiel 2 - Martingale im Grenzwert sind nicht notwendigerweise eventuelle Martingale

Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $P(\eta_n = 1) = \frac{1}{n^2} = 1 - P(\eta_n = 0)$ für jedes $n \geq 1$ erfüllen. Definiert man die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $X_n := \eta_1 + ... + \eta_n$ für jedes $n \geq 1$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\Sigma_n := \sigma(\eta_1, ..., \eta_n)$ für jedes $n \geq 1$ so gelten nachfolgende Behauptungen.

1. $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist ein Martingal im Grenzwert, aber
2. $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist kein eventuelles Martingal.

Beweis - Martingale im Grenzwert

Trivialerweise ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ X_n bzgl. Σ_n messbar, womit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist.
Ferner gilt für jedes $n \geq m$ nachfolgende Überlegung.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) - X_m \\
&\qquad = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{m} \eta_k|\Sigma_m) + \mathbb{E}(\sum_{k=m+1}^{n} \eta_k|\Sigma_m) - X_m \\
&\qquad = \eta_1 + \ldots + \eta_m + \mathbb{E}(\eta_{m+1} + \ldots + \eta_n) - X_m \\
&\qquad = \mathbb{E}(\eta_{m+1} + \ldots + \eta_n) \\
&\qquad = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

Beweis - Martingale im Grenzwert

Aus dieser Überlegung ergibt sich, dass

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} |\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) - X_m| = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} = 0$$

ist, womit $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal im Grenzwert ist.

Beweis - Kein eventuelles Martingal

Offensichtlich gilt nun, dass

$$\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) = X_{n-1} + \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n \geq 2$$

ist, wodurch

$$\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) \neq X_{n-1} \quad \forall\, n \geq 2$$

gilt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ per Definition somit kein eventuelles Martingal sein kann.

Definition - Ein Spiel welches mit der Zeit fairer ist

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration bzgl. der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist, so heißt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Spiel fairer mit Zeit, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |\mathbb{E}(X_m|\Sigma_n) - X_n| \overset{P}{=} 0$$

gilt.

Beispiel 3 - Ein eventuelles Martingal ist im Allgemeinen kein Spiel welches mit der Zeit fairer ist

Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $P(\zeta_n = -1) = \frac{1}{2^n} = 1 - P(\zeta_n = 1)$ für jedes $n \geq 1$ genügen. Ferner sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\eta_1 := \zeta_1$ und durch $\eta_{n+1} := 2^n \zeta_{n+1} \mathbb{1}\{\zeta_n = -1\}$ für jedes $n \geq 1$ definiert. Betrachtet man nun die Folge von Zufallsvariabeln $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $X_n = \eta_1 + ... + \eta_n$ und $\Sigma_n = \sigma(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ gelte, so erfüllt $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ die nachfolgenden Bedingungen.

1. $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist ein eventuelles Martingal, aber
2. $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist kein Spiel welches mit der Zeit fairer ist.

Beweis - Eventuelles Martingal

Zunächst gilt für jedes $k \geq 2$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\eta_k|\Sigma_{k-1}) &= \mathbb{E}(2^{k-1}\zeta_k \mathbb{1}\{\zeta_{k-1} = -1\}|\Sigma_{k-1}) \\
&= 2^{k-1}\mathbb{E}(\zeta_k)\mathbb{1}\{\zeta_{k-1} = -1\} \\
&= (2^{k-1} - 1)\mathbb{1}\{\zeta_{k-1} = -1\}
\end{aligned}$$

ist.

Beweis - Eventuelles Martingal

Hieraus ergibt sich, dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) \neq X_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(\mathbb{E}(\eta_1|\Sigma_{n-1}) + \ldots + \mathbb{E}(\eta_{n-1}|\Sigma_{n-1}) + \mathbb{E}(\eta_n|\Sigma_{n-1}) \neq X_{n-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(\eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} + (2^{n-1} - 1)\mathbb{1}\{\zeta_{n-1} = -1\} \neq X_{n-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(\zeta_{n-1} = -1) \; < \; \infty
\end{aligned}$$

gilt und $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ somit nach dem Lemma von Borel-Cantelli ein eventuelles Martingal ist.

Beweis - Kein Spiel fairer mit Zeit

Zunächst gilt nachfolgende Abschätzung.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{2m}|\Sigma_m) - X_m \\
&= \mathbb{E}(X_{2m} - X_m|\Sigma_m) \\
&= \mathbb{E}(\eta_{m+1}|\Sigma_m) + \sum_{k=m+2}^{2m} \mathbb{E}(\eta_k|\Sigma_m) \\
&= (2^m - 1)\mathbb{1}\{\zeta_m = -1\} + \sum_{k=m+2}^{2m} (1 - 2^{-k+1}) \\
&\geq \sum_{k=m+2}^{2m} (1 - 2^{-k+1}) \\
&> \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Beweis - Kein Spiel fairer mit Zeit

Aus vorangegangener Überlegung folgt nun, dass für jedes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$

$$P(|\mathbb{E}(X_{2m}|\Sigma_m) - X_m| > \varepsilon) = 1$$

gilt.

Aus der Definition der stochastischen Konvergenz und der des Spiels fairer mit Zeit folgt, dass $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ offensichtlich kein Spiel fairer mit Zeit ist.

Übersicht

- Grundlagen
- Martingalähnliche Begriffe
- **Martingalkonvergenz und Martingalungleichungen**

Satz

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, sodass $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist. Ferner sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, sodass

1. $g(x) > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}_+$,
2. $g(x) = g(-x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und
3. g ist konvex, das heißt es gilt für jedes $x, y \in \mathbb{R}$
   $g(\alpha x + (1-\alpha)y)) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y) \;\forall\; \alpha \in [0, 1]$

genügt, so erfüllt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nachfolgende Ungleichung.

$$P(\sup_{0<k\leq n} |X_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}g(X_n)}{g(\varepsilon)} \quad \forall\; \varepsilon > 0 \tag{1}$$

Beispiel 4 - Die Konvexität ist im Allgemeinen nötig

Seien $a, h \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen und seien $\zeta_1,\ \zeta_2$ zueinander unabhängige Zufallsvariablen, welche $P(\zeta_1 = a) = P(\zeta_1 = -a) = \frac{1}{2}$ und $P(\zeta_2 = h) = P(\zeta_2 = -h) = \frac{1}{2}$ erfüllen. Ferner sei $(X_n, \Sigma_n, n = 1, 2)$ durch $X_1 := \zeta_1$, $X_2 := \zeta_1 + \zeta_2$ und durch $\Sigma_1 = \sigma(\zeta_1)$, $\Sigma_2 = \sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ definiert. Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nun eine beliebige Funktion, welche den ersten beiden Bedingungen des vorangegangenen Satzes genügt und die Konvexitätsbedingung für $\alpha = \frac{1}{2}$ nicht erfüllt, so ist die Ungleichung (1) für $\varepsilon = a$ verletzt.

Beweis - Martingaleigenschaften

$(X_n, \Sigma_n, n = 1, 2)$ ist ein Martingal, da

$$\mathbb{E}(X_2|\Sigma_1) = \mathbb{E}(\zeta_1|\Sigma_1) + \mathbb{E}(\zeta_2|\Sigma_1) = \zeta_1 + \mathbb{E}(\zeta_2) = X_1$$

gilt und auch die ersten beiden Martingaleigenschaften trivialerweise erfüllt sind.

Beweis - Die Ungleichung ist verletzt

Zunächst gilt, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X_2)) & \\
&= \frac{1}{4}(g(-a-h)+g(-a+h)+g(a-h)+g(a+h)) \\
&= \frac{1}{2}(g(a+h)+g(a-h)) \\
&< g(\frac{1}{2}(a+h+a-h)) \\
&= g(a)
\end{aligned}$$

ist, wobei hier genutzt wurde, dass die Konvexität für $\alpha = \frac{1}{2}$ verletzt ist.

Beweis - Die Ungleichung ist verletzt

Es gilt, dass

$$P(\sup_{1\leq k\leq 2} |X_k| \geq a) = 1$$

ist, womit sich mittels vorangegangener Überlegung

$$P(\sup_{1\leq k\leq 2} |X_k| \geq a) > \frac{\mathbb{E}g(X_2)}{g(a)}$$

ergibt.

Definition - Reguläres Martingal

Ein Martingal $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ heißt regulär, falls eine Zufallsvariable ζ existiert, sodass

$$X_n = \mathbb{E}(\zeta | \Sigma_n)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung

Es lässt sich zeigen, dass jedes gleichgradig integrierbare Martingal auch regülar ist und, dass darüber hinaus, für die betrachtete Zufallsvariable $\zeta \overset{f.s.}{=} \lim_{n\to\infty} X_n$ gilt, falls das Martingal gleichgradig integrierbar ist.
Wir wollen nun aufzeigen, dass ζ im Allgemeinen nicht der Regularitätsbedingung genügt.

Beispiel 5

Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und standartnormalverteilter Zufallsvariablen. Ferner sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $S_n := \eta_1 + ... + \eta_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert. Betrachtet man nun die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $X_n := \exp(S_n - \frac{1}{2}n)$, für jedes $n \in \mathbb{N}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\Sigma_n := \sigma(\eta_1, ..., \eta_n)$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gelten alle nachfolgenden Behauptungen.

1. $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist ein Martingal.
2. $\zeta := \lim_{n\to\infty} X_n = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1.
3. Es gilt $\mathbb{E}(\zeta|\Sigma_n) \neq X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis - Martingaleigenschaften

Die Adaptiertheit ist trivial, die Existenz der Erwartungswerte ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_n| & \\
&= (\mathbb{E}(\exp(\eta_1)))^n \exp\left(-\frac{1}{2}n\right) \\
&= \varphi(-i)^n \exp\left(-\frac{1}{2}n\right) \\
&= \exp(\frac{1}{2}n) \exp\left(-\frac{1}{2}n\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

gilt, wobei φ die char. Fkt. einer $N(0,1)$-verteilten ZV sei.

Beweis - Martingaleigenschaften

Die letzte Martingaleigenschaft ergibt sich nun aus der Tatsache, dass für jedes $m \leq n$ nachfolgendes gilt.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|\Sigma_m) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\exp\left(\eta_1 + \ldots + \eta_n - \frac{1}{2}n\right)|\Sigma_m\right) \\
&\quad = \exp\left(\eta_1 + \ldots + \eta_m - \frac{1}{2}n\right)(\mathbb{E}(\exp(\eta_1)))^{n-m} \\
&\quad = \exp\left(\eta_1 + \ldots + \eta_m - \frac{1}{2}n\right)(\varphi(-i))^{n-m} \\
&\quad = \exp\left(\eta_1 + \ldots + \eta_m - \frac{1}{2}n\right)\exp\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}m\right) \\
&\quad = X_m
\end{aligned}
$$

Beweis - Die Regularitätsbedingung ist nicht erfüllt

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen ergibt sich unmittelbar, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\zeta := \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n\left(\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

gilt.
Hieraus folgt offensichtlicht, dass $\mathbb{E}(\zeta|\Sigma_n) = 0 \neq X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung

Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ genau dann fast sicher, wenn sie stochastisch konvergiert. Nachfolgendes Beispiel sollen zeigen, dass dies für Martingale nicht der Fall ist.

Beispiel 6

Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche $P(\zeta_n = 1) = P(\zeta_n = -1) = \frac{1}{2n}$ und $P(\zeta_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Betrachtet man nun die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Filtration $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $X_n = \zeta_n \mathbb{1}\{X_{n-1} = 0\} + nX_{n-1}|\zeta_n|\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, $X_0 := 0$ und $\Sigma_n := \sigma(\zeta_1, ..., \zeta n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte, so gelten alle nachfolgenden Behauptungen.

1. $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ist ein Martingal.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \stackrel{P}{=} 0$.
3. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht fast sicher konvergent.

Beweis - Martingaleigenschaften

Sowohl die Adaptiertheit, als auch die Existenz der Erwartungswerte von X_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind trivial. Ferner folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_n|\Sigma_{n-1}) \\
&\quad = \mathbb{E}(\zeta_n \mathbb{1}\{X_{n-1} = 0\} + nX_{n-1}|\zeta_n|\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}|\Sigma_{n-1}) \\
&\quad = \mathbb{1}\{X_{n-1} = 0\}\mathbb{E}(\zeta_n) + nX_{n-1}\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}\mathbb{E}|\zeta_n| \\
&\quad = nX_{n-1}\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\}\frac{1}{n} \\
&\quad = X_{n-1}\mathbb{1}\{X_{n-1} \neq 0\} \\
&\quad = X_{n-1}
\end{aligned}$$

gilt, womit $(X_n, \Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist.

Beweis - Stochastische Konvergenz

Es gilt $P(X_n = 0) = P(\zeta_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, wodurch für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(|X_n| \leq \varepsilon) = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 0$$

gilt und sich somit die stochastische Konvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null ergibt.

Beweis - Das Martingal konvergiert nicht fast sicher

Zunächst gilt, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|\zeta_n| = 1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$$

ist, woraus nach dem Lemma von Borel-Cantelli

$$P(\zeta_n \neq 0 \ u.o.) = P(|\zeta_n| = 1 \ u.o.) = 1$$

folgt.

Beweis - Das Martingal konvergiert nicht fast sicher

Da wie bereits gezeigt $P(X_n = 0) = P(\zeta_n = 0)$ gilt, gilt auch, dass $P(X_n \neq 0 \ u.o.) = P(\zeta_n \neq 0 \ u.o.)$ ist. Insgesamt ergibt sich nun, dass

$$P(X_n \neq 0 \ u.o.) = 1$$

ist. Letztere Gleichung impliziert aber offensichtlich, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast sicher gegen Null konvergieren kann, womit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast sicher konvergent ist.

Literaturverzeichnis

[1] Counterexamples in Probability, J. Stoyanov, Wiley 1997, Kapitel 22

Alles hat ein Ende...

... und zwar auch dieser Vortrag.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit :-).