Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Georg Schalaschov
Institut für Stochastik

14. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Warum betrachtet man überhaupt stochastische Prozesse? Wo finden sie Verwendung?

Motivation

- Anwendung in Physik, Technik, Finanzwelt, ...
- Untersuchung von zufälligen Prozessen, d.h. von Erscheinungen, die mit der Zeit ablaufen und bei denen der Zufall eine Rolle spielt
- Beispiele:
  - zwei Gase werden in Berührung gebracht, die Moleküle der beiden Gase vermischen sich. Es findet Diffusion statt.
  - Radioaktiver Zerfall
  - Brownsche Bewegung
  - Anzahl der Anrufe, die in einer Telefonzentrale während eines bestimmten Zeitintervalls erfolgen
  - Rauschen bei elektrischen Signalen

Historische Anmerkungen

Die Grundsteine einer allgemeinen Theorie stochastischer Prozesse wurden in den 30er Jahren des 20 Jh. von A.N. Kolmogorov und A.J. Chintchin gelegt.

Abbildung : A.N.Kolmogorov

Quelle:www.msu.ru

Abbildung : A.A.Markov

Quelle:www.meyn.ece.ufl.edu

Allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse

Sei T zunächst eine beliebige Menge.

Zufallsprozess

ist die Familie $\{X_t, t \in T\}$ von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \to E$, die über ein und dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind.

Trajektorie bzw. Pfad

bei fixierten $\omega_0 \in \Omega$ nennt man $X_{\omega_o}(t) = X(t, \omega_0)$, $t \in T$ Trajektorie.

Allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse

Definitionen

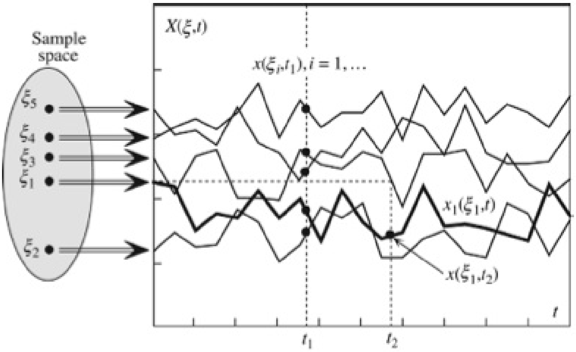

Abbildung : Realisierung der stochastischen Prozesse

Quelle: Venkatarama Krishnan "Probability and Random Processes" p. 407

Allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse

Modifikationen

Seien $\{X_t, t \in T\}$ und $\{Y_t, t \in T\}$ zwei stochastische Prozesse, definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X und Y heißen Modifikationen voneinander, falls $\forall t \in T$,

$$\mathbb{P}[\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)] = 0$$

Ununterscheidbare Prozesse

X und Y heißen ununterscheidbar, falls es ein $N \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mathbb{P}[N] = 0$ und

$$\{X_t \neq Y_t\} \subset N \text{ für jedes } t \in T$$

Allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse

endlich-dimensionale Verteilungen

Sei $\{X_t, t \in T\}$ ein stochastischer Prozess und $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ gegeben, dann besitzen die entsprechenden Zufallsvariablen $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ n-dim. als Verteilungsfunktion.

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1 \ldots, t_n) = \mathbb{P}(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n) = \mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}$$

Allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse

Eigenschaften der endlich-dimensionalen Verteilungen

- $0 \leq F_X(x_1, \dots, x_n; t_1 \dots, t_n) \leq 1$
- Die Funktionen $F_X(x_1, \dots, x_n; t_1 \dots, t_n)$ sind rechtsseitig stetig
- falls mind. ein $x_i \to -\infty$, dann $F_X(x_1, \dots, x_n; t_1 \dots, t_n) \to 0$
- Die Funktionen $F_X(x_1, \dots, x_n; t_1 \dots, t_n)$ sind monoton
- Für beliebige Permutationen $\{k_1, \dots, k_n\}$ von $\{1, \dots, n\}$ gilt:

$$F_X(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}; t_{k_1} \dots, t_{k_n}) = F_X(x_1, \dots, x_n; t_1 \dots, t_n) \quad (1)$$

- Für beliebige $1 \leq k < n$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{P}$ gilt:

$$F_X(x_2, \dots, x_n; t_2 \dots, t_n) = F_X(+\infty, x_2, \dots, x_n; t_1 \dots, t_n) \quad (2)$$

Allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse

Satz von Kolmogorov

Sei $F = F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1 \ldots, t_n)$ gegeben, F erfüllt (1) und (2). Dann existiert ein stochastischer Prozess $\{X(t), t \in T\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dessen endlich dimensionale Verteilungen F_X mit F übereinstimmen.

Der Satz von Kolmogorov ist hinreichend für die Existenz des Zufallsprozesses mit endlich dimensionalen Verteilungen.

Eigenschaften der Modifikationen

Wir definieren einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ wie folgt: $\Omega = \mathbb{R}_+, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ und $\mathbb{P}$ ist ein stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir setzen $T = \mathbb{R}_+$ und konstruieren $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ und $Y = (Y_t, t \in \mathbb{R}_+)$.

$X_t(\omega) \equiv 0$ und $Y_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t\}}(\omega)$
$\Rightarrow$ $Y_t(\omega)$ ist die Modifikation von X.

ABER: $Y_t(\omega)$ ist kein ununterscheidbarer Prozess von X

Eigenschaften der Modifikationen

Sei $\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ und $\mathbb{P}$ ist das Lebesguemaß und $T = \mathbb{R}_+$, $X = (X_t, t \in T)$ und $Y = (X_t, t \in T)$ definieren wir wie folgt:

$X_t(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \in T$,

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 1, & t - [t] = \omega \\ 0, & t - [t] \neq \omega \end{cases}$$

Y ist die Modifikation von X, alle Trajektorien von X sind stetig und alle Trajekrorien von Y sind unstetig.

Allgemeine Theorie der stochastischen Pozesse

Stetigkeitsarten

Der stochastische Prozess $X = \{X_t, t \in T\}$ mit T als topologischer Raum heißt

stochastisch stetig

auf T, falls $X(s) \xrightarrow[s\to t]{P} X(t)$, für beliebige $t \in T$, d.h.

$$\mathbb{P}(|X(s) - X(t)| > \epsilon) \xrightarrow[s\to t]{} 0, \forall \epsilon > 0.$$

L^p-stetig

auf T, $p \geq 1$, falls $X(s) \xrightarrow[s\to t]{L^p} X(t), t \in T$, d.h. $\mathbb{E}|X(s) - X(t)|^p \xrightarrow[s\to t]{} 0$

Allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse

Stetigkeitsarten

Der stochastische Prozess $X = \{X_t, t \in T\}$ mit T als topologischer Raum heißt

$f.s.$ stetig

auf T, falls $X(s) \xrightarrow[s \to t]{f.s.} X(t)$, $t \in T$, d.h. $\mathbb{P}(X(s) \xrightarrow[s \to t]{} X(t)) = 1, t \in T$

stetig

falls alle Trajektorien von X stetige Funktionen sind.

Prozesse, die stochastisch stetig jedoch nicht f.s. stetig

Sei $X = (X_t, t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit dem Parameter λ
$X_0 = 0$ $f.s.$ und die Zuwächse von X sind unabhängig und $X_t - X_s$ für $t > s$ sind $Poi(\lambda(t-s))$, d.h.
$\mathbb{P}[X_t - X_s = k] = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$ für $k = 0, 1, 2, \cdots$

X ist stochastisch stetig, obwohl jede Trajektorie von X eine nichtfallende Treppenfunktion mit Sprüngen der Höhe 1 ist.

Markov-Prozesse

Markovkette

Ein stochastischer Prozess $\{X_0, X_1, \dots\}$ in diskreter Zeit und mit dem abzählbaren Zustandsraum E heißt Markovkette, wenn für jedes beliebige $n = 1, 2, \dots$ und jede beliebige Folge $i_0, i_1, \dots, i_{n+1}$ mit $i_k \in E$ folgende Beziehung gilt:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

Übergangswahrscheinlichkeiten

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i); n = 0, 1, \dots, ; i, j \in E$$

sind die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette.

Markov-Prozesse

homogene Markovkette

Eine Markovkette heißt homogen, wenn ihre Übergangswahrscheinlichkeiten nicht vom Zeitpunkt n abhängen:

$$p_{ij}(n) = p_{ij}$$

Übergangswahrscheinlichkeiten werden in der Übergangsmatrix P zusammengefasst: $P = (p_{ij})$, $i, j \in E$

Markov-Prozesse

mehrstufige Überganswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i); m = 1, 2, \ldots$$

$p_{ij}^{(m)}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Markovkette, ausgehend vom Zustand i in einen beliebigen Zeitpunkt $t = n$, nach m Zeiteinheiten im Zustand j befinden.

Markov-Prozesse

Formel von Chapman-Kolmogorov

Für die n-stufige Übergangswahrscheinlichkeit gilt:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \tag{3}$$

Markov-Prozess

Hängt die Zukunft nur von Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab, so nennt man diese Eigenschaft, eine **Markov-Eigenschaft**, dadurch sind Markov-Prozesse definiert. Die Gleichung von Chapman-Kolmogorov ist die Konsequenz der Markov-Eigenschaft.

Im folgenden werden wir eine Folge von Zufallsvariablen konstruieren, die keine Markov-Eigenschaft besitzt, aber die Gleichung von Chapman-Kolmogorov erfüllen. Dabei ist (3) als Multiplikation der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu verstehen.

Nicht Markovfolge, aber die Gleichung von Chapman-Kolmogorov ist erfüllt

Sei $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ i.i.d. und $Y_n \tilde{\ } \mathcal{U}(\{1,2,3,4\})$
Für j=1, 2 und 3 definiere: $A_j^{(n)} = \{Y_n = j \text{ oder } Y_n = 4\}$

Definiere Folge $\{X_n\}$ durch $X_{3(m-1)+j} = \mathbb{1}_{A_j^{(m)}}$ wobei $m \geq 1$ und $j \in \{1,2,3\}$

Nicht Markovfolge, aber die Gleichung von Chapman-Kolmogorov ist erfüllt

$\mathbb{P}(X_{3(m-1)+j}) = \frac{1}{2}$, weil $\mathbb{P}(A_j^{(n)}) = \frac{1}{2}$ für $\forall k_1, k_2, k_3 \in \{0,1\}$ und $n > m$ gilt die Gleichung:

$$\mathbb{P}[X_n = k_1] = \mathbb{P}[X_n = k_2 | X_m = k_3] = \frac{1}{2}$$

und für $l < m < n$ gilt:

$$\mathbb{P}[X_n = k_2 | X_l = k_1] = \frac{1}{2} = \underbrace{\mathbb{P}[X_n = k_2 | X_m = 0]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\mathbb{P}[X_m = 0 | X_l = k_1]}_{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}[X_n = k_2 | X_m = 1]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\mathbb{P}[X_m = 1 | X_l = k_1]}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Das heißt die Chapman-Kolmogorov Gleichung ist für die Folge $\{X_n, n \geq 1\}$ erfüllt.

Nicht Markovfolge, aber die Gleichung von Chapman-Kolmogorov ist erfüllt

ABER:

$$\mathbb{P}\underbrace{[X_{3m} = 1 | X_{3m-2} = 1, X_{3m-1} = 1]}_{\text{sicheres Ereignis}} = 1 \text{ für } m = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Also aus (4) folgt, dass die Folge $\{X_n, n \geq 1\}$ keine Markov-Eigenschaft besitzt und damit keine Markovfolge ist.

Literatur

- Stoyanov J. : „Counterexamples in Probability“
- Spodarev E. : „Vorlesungskript in Stochastik II“
- Beichelt F.E., Montgomery D.C.: „Teubner-Taschenbuch der Stochastik“
- Gnedenko B.W.: „Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie “

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!