Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Mathias Schaefer

Universität Ulm

26. November 2012

Übersicht

1. **Normalverteilung**
   - Definition
   - Eigenschaften
   - Gegenbeispiele
2. **Momentenproblem**
   - Definition
   - Kriterien
   - Gegenbeispiele

Definition der Normalverteilung

Eine absolutstetige Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, wenn sie folgende Dichte besitzt:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

Notation: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Spezialfall

Ist $X \sim N(0, 1)$, so heißt X **standardnormalverteilt**. Ihre Dichte lautet dann:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

Eigenschaften für X $\sim N(\mu, \sigma^2)$

- $\mathbb{E}\, X = \mu$
- $\operatorname{Var} X = \sigma^2$
- $\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\ ,\ t \in \mathbb{R}.$ (Char. Funktion)

Für $\mu = 0$ gilt:

- $\alpha_{2n+1} := \mathbb{E}\, X^{2n+1} = 0$ (ungerade Momente)
- $\alpha_{2n} := \mathbb{E}\, X^{2n} = \sigma^{2n}(2n-1)!!$ (gerade Momente)

2-dimensionaler Fall

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein 2-dim. Zufallsvektor, $\mu \in \mathbb{R}^2$ und C eine symmetrisch positiv definite (2x2)-Matrix.

X ist bivariat normalverteilt mit Parametern μ und C (Notation: $X \sim N(\mu, C)$), falls er absolutstetig verteilt ist mit der Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det(C)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)}, \; x \in \mathbb{R}^2.$$

Eine äquivalente Variante lautet:

Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ ist bivariat normalverteilt mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}^2$ und einer s.p.d. (2x2)-Matrix C, falls

$\forall a \in \mathbb{R}^2$ die Zufallsvariable $(a, X) = a^T X \sim N(a^T\mu, a^T Ca)$ 1-dim. normalverteilt ist.

Eigenschaften im 2-dim. Fall

- $\mathbb{E}\, X_1 = \mu_1$
- $\mathbb{E}\, X_2 = \mu_2$
- C ist die Kovarianzmatrix von X
- $\operatorname{Var} X_1 = {\sigma_1}^2$
- $\operatorname{Var} X_2 = {\sigma_2}^2$

Beispiel 1.1

Es gilt: (X,Y) ist bivariat normalverteilt $\Rightarrow$ X und Y sind jeweils normalverteilt.

Die Gegenrichtung gilt jedoch nicht!

Ein Beispiel zeigt, dass es nicht-normalverteilte bivariate Verteilungen gibt, deren Randverteilungen jedoch normalverteilt sind.

Beispiel 1.1 (Fortsetzung)

Betrachten wir dazu folgende bivariate Dichte eines Zufallsvektors (X,Y):

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (2\pi\sqrt{3})^{-1}(e^{-\frac{2}{3}(x^2+xy+y^2)} + e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)})$$

mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Offensichtlich ist (X,Y) nicht bivariat normalverteilt.

Das Berechnen der Randverteilungen von X und Y liefert jedoch $\boldsymbol{X \sim N(0,1)}$, $\boldsymbol{Y \sim N(0,1)}$.

Beispiel 1.2

Die Beziehung zwischen Unkorreliertheit und Unabhängigkeit

Wir wissen: 2 ZV X und Y unabhängig $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Gilt hier auch die Gegenrichtung?

Antwort: Nein, nur wenn (X,Y) ein bivariat normalverteilter Zufallsvektor ist.

Betrachten wir nun folgende zwei Beispiele:

Beispiel 1.2.1

Betrachten wir wiederum die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (2\pi\sqrt{3})^{-1}(e^{-\frac{2}{3}(x^2+xy+y^2)} + e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}).$$

Wie eben gezeigt, gilt sind X und Y jeweils standardnormalverteilt.
Also gilt $\mathbb{E}\,X = \mathbb{E}\,Y = 0$.
Man kann zeigen, dass $\mathbb{E}\,(XY) = 0$ und daher gilt
$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}\,X \cdot \mathbb{E}\,Y = 0$.
Da aber $f_{(X,Y)}(x,y) \neq \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, sind X und Y abhängig.

Beispiel 1.2.2

Seien $X = Y_1 + iY_2$ und $Z = Y_3 + iY_4$, wobei (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) ein 4-dim. normalverteilter Zufallsvektor ist.

Seien $\mathbb{E}\, Y_k = 0 \;\forall\; k$ und $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

die Kovarianzmatrix.

Man kann zeigen, dass X und Z unkorreliert sind. Dennoch sind sie nicht unabhängig. Wenn sie unabhängig wären, so wären auch $Y_1 = Re(X)$ und $Y_4 = Im(Z)$ unabhängig **(WR)**, und somit unkorreliert. Da aber $\mathbb{E}\,(Y_1 Y_4) = -1$, sind Y_1 und Y_4 **abhängig**, daher auch X und Z (Umkehrschluss von oben).

Beispiel 1.3

Es gibt folgenden kuriosen Fall: (X,Y) ist **nicht** bivariat normalverteilt, obwohl X, Y, X + Y, X – Y jeweils normalverteilt sind, sowie X und Y unkorreliert.

Betrachten wir dazu folgende Funktion:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-0{,}5(x^2+y^2)}(1 + xy(x^2 - y^2)e^{-0{,}5(x^2+y^2+2\epsilon)})$$

mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $\epsilon > 0$ so, dass

$$|xy(x^2 - y^2)e^{-0{,}5(x^2+y^2+2\epsilon)}| \leq 1 \quad (\text{damit } f(x,y) \geq 0$$

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

Beispiel 1.3 (Fortsetzung)

Diese Funktion hat folgende Fourrier-Transformation ϕ :

$$\phi(s,t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(isx+ity)} \cdot f(x,y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = ... =$$

$$= e^{-0,5(s^2+t^2)} + \frac{1}{32} st(s^2 - t^2) e^{-\epsilon - 0,25(s^2+t^2)},$$

mit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Beispiel 1.3 (Fortsetzung)

$\phi(s,t) = e^{-0{,}5(s^2+t^2)} + \frac{1}{32}st(s^2-t^2)e^{-\epsilon-0{,}25(s^2+t^2)}$

Man kann folgern, dass

1) $\phi(0,0) = e^0 = 1 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow$ f ist die bivariate Dichte eines Zufallsvektors (X,Y).

2) $\phi(0,t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ und $\phi(s,0) = e^{-\frac{s^2}{2}}$ (Fubini!)

$\Rightarrow$ X und Y sind beide standardnormalverteilt.

3) $\phi(t,t) = e^{-t^2}$, also ist $X+Y \sim N(0,2)$.

Beispiel 1.3 (Fortsetzung)

$\phi(s,t) = e^{-0{,}5(s^2+t^2)} + \frac{1}{32} st(s^2 - t^2) e^{-\epsilon - 0{,}25(s^2+t^2)}$

4) Wegen der Symmetrie der Standardnormalverteilung ist auch $X - Y \sim N(0,2)$.

5) Man kann zeigen, dass $\mathbb{E}\,(XY) = 0$, X und Y sind also unkorreliert.

Fazit: Der Zufallsvektor (X,Y), der durch f(x,y) definiert wird, ist also trotz der erfüllten Eigenschaften 2) bis 5) nicht bivariat normalverteilt.

Beispiel 1.4

Aus der Statistik ist bekannt, dass für $X_i \sim N(0, {\sigma_i}^2); i = 1, ..., n$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(X_i X_j X_k X_l\right) = c_{ij} c_{kl} + c_{ik} c_{jl} + c_{il} c_{jk} \ , \quad \text{i,j,k,l} = 1,\ldots,\text{n}$$

mit $c_{ij} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathbb{E}\left(X_i X_j\right)$.

Gilt dies ausschließlich für normalverteilte Zufallsvariablen?

Beispiel 1.4 (Fortsetzung)

Betrachten wir eine Folge $Y_1, Y_2, \ldots$ von diskreten, unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen mit folgender Verteilung:

- $\mathbb{P}(Y_1 = -\sqrt{3}) = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(Y_1 = \sqrt{3}) = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \frac{2}{3}$

Beispiel 1.4 (Fortsetzung)

Die Berechnung diverser Kombinationen der Indizes ergibt:

$$\mathbb{E}\left(X_i X_j X_k X_l\right) = c_{ij} c_{kl} + c_{ik} c_{jl} + c_{il} c_{jk}$$

für beliebige $i, j, k, l \in \mathbb{N}$. (auch Überschneidungen von Indizes)

Dieses Ergebnis ist kurios, da diese Folge von Zufallsvariablen rein gar nichts mit der Normalverteilung zu tun hat.

Das Momentenproblem

Sei $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ eine Folge reeller Zahlen, $B \subset \mathbb{R}$ ein festes Intervall und $F(x)$ eine Verteilungsfunktion, $x \in B$ sodass

$a_n = \mathbb{E}(X^n) = \int_B x^n \, \mathrm{d}F(x)$; n=0,1,2,...

(wobei $a_0 = 1$).

Wird F durch $\{a_n\}$ eindeutig festgelegt, so nennen wir das Momentenproblem (MP) **bestimmt**, ansonsten **unbestimmt**.

Falls $B = [0, \infty)$, sprechen wir von einem **Stieltjes-MP**,

falls $B = \mathbb{R}$, von einem **Hamburger-MP**.

Kriterien

Es gibt einige hinreichende Bedingungen, um sicherzustellen, ob das MP bestimmt oder unbestimmt ist. Dies sind u.a. folgende Kriterien:

Kriterium 1:

Die momenterzeugende Funktion $M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$ existiert für $|t| < t_0,\ t_0 > 0$.

Kriterien (Fortsetzung)

Kriterium 2: Carleman-Bedingung

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n})^{-\frac{1}{2n}} = \infty$,

dann ist F eindeutig bestimmt durch $\{a_n\}$.

Ist $X \geq 0$ f.s., dann lautet die Bedingung

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\frac{1}{2n}} = \infty$.

Kriterien (Fortsetzung)

Kriterium 3: Krein-Bedingung

a) Sei F stetig mit Dichte f(x) > 0, $x \in \mathbb{R}$.

Falls $\int_{\mathbb{R}} -\frac{\ln f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$,

so ist das MP **un**bestimmt.

b) Sei F(x), $x \in \mathbb{R}_+$ (d.h. $F(0) = 0$) stetig mit Dichte $f(x) > 0$, $x > 0$ (also $f(x) = 0, x \leq 0$).

Falls $\int_0^\infty -\frac{\ln f(x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$,

so ist das MP **un**bestimmt.

Übersicht

Betrachten wir nun 3 Beispiele:

1) Das MP für Potenzen der Normalverteilung

2) Das MP für Potenzen der Exponentialverteilung

3) Das MP für eine weitere Familie von Verteilungen

Beispiel 2.1: Das MP für Potenzen der Normalverteilung

Ist X eine Zufallsvariable mit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, so ist die Verteilung von X, sowie von X^2 eindeutig bestimmt durch die zugehörige Momentenfolge, denn man kann zeigen, dass Kriterium 2 erfüllt ist.

Für höhere Potenzen ist dies aber nicht der Fall. Betrachten wir z.B. X^3. Zwar existiert $\mathbb{E}\left(X^3\right)^k \; \forall \; k \in \mathbb{N}_0$, aber $M(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX^3}\right)$ existiert nur für t=0.

Also existiert die momenterzeugende Funktion **nicht**. Folglich kann man Kriterium 1 nicht anwenden.

Daher prüfen wir nun Kriterium 3:

Beispiel 2.1: Das MP für Potenzen der Normalverteilung

Betrachten wir hierfür den speziellen Fall $X \sim N(0, \frac{1}{2})$, mit der zugehörigen Dichte $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}$.

Dann hat $Y := X^3$ die Dichte
$f_Y(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\ |x|^{-\frac{2}{3}}\ e^{-|x|^{\frac{2}{3}}},\ x \in \mathbb{R}$.

Verwenden wir die Ergebnisse

$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$,

$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$,

$\int_0^\infty \frac{x^b}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{b\pi}{2})$, für $b \in (-1, 1)$,

und setzen diese zusammen. Wir erhalten $\int_{\mathbb{R}} -\frac{\ln f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$. Also ist das MP **un**bestimmt.

Beispiel 2.1: Das MP für Potenzen der Normalverteilung

Finden wir nun eine andere Zufallsvariable X_ϵ, die die gleichen Momente wie $Y = X^3$ hat $\left(\mathbb{E}\,(X_\epsilon^k) = \mathbb{E}\,(Y^k)\ \forall\ k = 1, 2, \ldots\right)$.

Betrachten wir dazu die Funktion

$$f_\epsilon(x) = f_Y(x)\left(1 + \epsilon\left[\cos(\sqrt{3}|x|^{\frac{2}{3}}) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}|x|^{\frac{2}{3}})\right]\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 2.1: Das MP für Potenzen der Normalverteilung

$$f_\epsilon(x) = f_Y(x)\left(1 + \epsilon\left[\cos(\sqrt{3}|x|^{\frac{2}{3}}) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}|x|^{\frac{2}{3}})\right]\right)$$

$$g(x) := \cos(\sqrt{3}|x|^{\frac{2}{3}}) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}|x|^{\frac{2}{3}})$$

Man kann zeigen, dass $f_\epsilon(x)$ für $\epsilon \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ die Dichte einer ZV X_ϵ ist. Für $\epsilon \neq 0$ gilt $f_\epsilon \neq f_Y$.

Verwenden wir $\int_{\mathbb{R}} x^k \; f_Y(x)\; g(x)\,\mathrm{d}x = 0; \quad$ k=1,2,... ,

um zu zeigen, dass $\mathbb{E}\, X_\epsilon^k = \mathbb{E}\, Y^k; \quad$ k=1,2,...

Wir haben zwei verschiedene Verteilungen mit derselben Momentenfolge gefunden!

Beispiel 2.2: Das MP für Potenzen der Exponentialverteilung

Sei $X \sim \text{Exp}(1)$. Dann gilt: $f_X(x) = e^{-x} \; \mathbb{1}_{(0,\infty)}$ und $a_k = \mathbb{E}\, X^k = k!$; k=1,2,...

Das MP ist **bestimmt** (prüfe z.B. Kriterium 1).

Sei nun $b > 0$ und $Y := X^b$. Es gilt:

$$f_Y(x) = \frac{1}{b} x^{(1/b)-1} e^{-x^{1/b}} \; \mathbb{1}_{(0,\infty)}.$$

Die Momente von Y sind $\mathbb{E}\, Y^k = \Gamma(bk+1)$; k=1,2,...

Beispiel 2.2: Das MP für Potenzen der Exponentialverteilung

Beim Prüfen von Kriterium 3 ergibt sich, dass

$$\int_0^\infty -\frac{\ln f_Y(x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty, \quad \text{wenn } b > 2.$$

Also ist $Y = X^b$ für $b > 2$ **un**bestimmt.

Finden wir wiederum eine Verteilung mit den gleichen Momenten wie Y.

Beispiel 2.2: Das MP für Potenzen der Exponentialverteilung

Für $b > 2$ betrachten wir folgende Funktion:

$$f_\epsilon(x) = f_Y(x)\left(1 + \epsilon\left[\cos(c_b\, x^{\frac{1}{b}}) - \frac{1}{c_b}\sin(c_b\, x^{\frac{1}{b}})\right]\right),\ x > 0,$$

$c_b := \tan(\frac{\pi}{b}),\ |\epsilon| \le \sin(\frac{\pi}{b})$.

Sei $g(x) := \cos(c_b\, x^{\frac{1}{b}}) - \frac{1}{c_b}\sin(c_b\, x^{\frac{1}{b}})$.

Man kann zeigen, dass $f_\epsilon(x)$ die Dichte einer ZV X_ϵ ist.

Die Gleichung $\int_0^\infty x^k\ f_Y(x)\ g(x)\,\mathrm{d}x = 0$; k=1,2,...

liefert $\mathbb{E}\,X_\epsilon^k = \mathbb{E}\,Y^k$, k=1,2,...,

obwohl $f_\epsilon \neq f_Y$ (außer bei $\epsilon = 0$).

Beispiel 2.2: Zusatz

Für $b \in (0, 2]$ kann man mithilfe der Gammafunktion zeigen, dass Kriterium 2 erfüllt ist.

Also ist die Verteilung von $Y = X^b$ für $0 < b \leq 2$ eindeutig bestimmt durch die zugehörige Momentenfolge.

Beispiel 2.3: Eine weitere Verteilung

Betrachten wir noch eine weitere Familie von Verteilungen, die **nicht** eindeutig durch ihre Momentenfolge bestimmt wird.

Dazu betrachten wir eine ZV X mit folgender Dichte:

$$f_X(x) = ce^{-bx^\lambda} \, \mathbb{1}_{(0,\infty)}$$

mit $b > 0,\ \lambda \in (0, \frac{1}{2})$ und c als normierende Konstante.

Für $\epsilon \in (-1, 1)$ und $s = b\ \tan(\lambda\pi)$ definieren wir die Funktion

$$f_\epsilon(x) = ce^{-bx^\lambda} \left(1 + \epsilon \sin(sx^\lambda)\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}.$$

Es gilt $f_\epsilon(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.3: Eine weitere Verteilung

Verwenden wir die folgende Gleichung, um zunächst zu zeigen, dass f_ϵ die Dichte einer ZV X_ϵ ist und um danach zu zeigen, dass $\mathbb{E}\, X_\epsilon^k = \mathbb{E}\, Y^k$; k=1,2,...

$\int_0^\infty x^n \; e^{-bx^\lambda} \; \sin(sx^\lambda)\,\mathrm{d}x = 0, \;\; n \in \mathbb{N}_0.$

(Beweisidee später)

Beispiel 2.3: Eine weitere Verteilung

$\int_0^\infty x^n \ e^{-bx^\lambda} \ \sin(sx^\lambda)\,\mathrm{d}x = 0$

Setzen wir n=0 ein, und zeigen, dass f_ϵ eine Dichte ist.

$$\int_0^\infty f_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty ce^{-bx^\lambda}\,\mathrm{d}x + c\epsilon \ \int_0^\infty e^{-bx^\lambda} \ \sin(sx^\lambda)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x + c\epsilon \cdot 0 = 1,$$

$\Rightarrow f_\epsilon$ ist eine Dichte.

Beispiel 2.3: Eine weitere Verteilung

$\int_0^\infty x^n \; e^{-bx^\lambda} \; \sin(sx^\lambda) \, \mathrm{d}x = 0$

Zeigen wir nun, dass $\mathbb{E}\, X_\epsilon^k = \mathbb{E}\, X^k$; k=1,2,...

$\mathbb{E}\, X_\epsilon^k = \int_0^\infty x^k \; f_\epsilon(x) \, \mathrm{d}x =$

$$= \int_0^\infty x^k \; ce^{-bx^\lambda} \, \mathrm{d}x + c\epsilon \; \int_0^\infty x^k \; e^{-bx^\lambda} \sin(sx^\lambda) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \mathbb{E}\, X^k + 0 = \mathbb{E}\, X^k; \; k = 1, 2, \ldots$$

Da auch $f_\epsilon \neq f$ für $\epsilon \neq 0$ gilt, haben wir also unendlich viele ZV X_ϵ mit denselben Momenten wie X konstruiert, daher ist das MP hier **un**bestimmt.

Beispiel 2.3: Eine weitere Verteilung

Nun noch die Beweisidee für die Gleichung

$\int_0^\infty x^n \; e^{-bx^\lambda} \; \sin(sx^\lambda)\, \mathrm{d}x = 0.$

Sei $p > 0$ und $q \in \mathbb{C}$ mit Re q > 0. Dann gilt:

$\int_0^\infty t^{p-1} \; e^{-qt}\, \mathrm{d}t = q^{-p} \; \Gamma(p)$

Für reelle q kann man dies leicht mit der Substitutionsregel zeigen. Anschließend kann man per Erweiterung auf die komplexe Ebene schließen, dass die Gleichung auch für komplexe q gilt (schreibe hierzu das Integral als Funktion in q).

Man setzt nun $p = \frac{n+1}{\lambda}$, $q = \alpha + i\beta$ und $t = x^\lambda$ ein und erhält:

Beispiel 2.3: Eine weitere Verteilung

$\int_0^\infty t^{p-1}\ e^{-qt}\,\mathrm{d}t = \ldots =$

$= \lambda \int_0^\infty x^n\ e^{-\alpha x^\lambda}\ \cos(\beta x^\lambda)\,\mathrm{d}x - i\lambda \int_0^\infty x^n\ e^{-\alpha x^\lambda}\ \sin(\beta x^\lambda)\,\mathrm{d}x =$

$= \ldots = \Gamma(\frac{n+1}{\lambda})\left(\alpha^{\frac{n+1}{\lambda}}[1 + i\tan(\lambda\pi)^{\frac{n+1}{\lambda}}]\right).$

Nun zeigt man, dass $[1 + i\tan(\lambda\pi)^{\frac{n+1}{\lambda}}]$ reellwertig ist, somit ist der gesamte letzte Teil der Gleichung reellwertig. Also muss $\int_0^\infty x^n\ e^{-\alpha x^\lambda}\ \sin(\beta x^\lambda)\,\mathrm{d}x = 0$ sein.

Vielen Dank für Ihre/Eure Aufmerksamkeit!!!