Gegenbeispiele in der WT - Wahrscheinlichkeiten und Eigenschaften von Zufallsereignissen

Milena Bös

Uni Ulm

22. November 2012

Grundlagen

Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$:

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für jedes $A \in \mathcal{F}$; $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- σ-Additivität:
  $A_i \in \mathcal{F}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j) \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω: Ereignismenge; $\mathcal{F}$: σ-Algebra von Teilmengen von Ω; $\mathbb{P}$: W-Maß

1. Ein nicht σ-additiver Inhalt

$\Omega =$ $\{r \in \mathbb{Q} : 0 \leq r \leq 1\}$

$\mathcal{F}_1$: Menge aller Intervalle über Ω

$\mathcal{F}_2$: Klasse aller endl. Vereinigungen von disjunkten Mengen aus $\mathcal{F}_1$

$\mathbb{P}$: $\mathbb{P}(A) = b - a$, falls $A = [a, b]$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i), \quad \text{falls } B \in \mathcal{F}_2, \text{ d.h. } B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \mathcal{F}_1$$

1. Ein nicht σ-additiver Inhalt

Betrachte zwei disjunkte Mengen aus $\mathcal{F}_2$:

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{und} \qquad B' = \bigcup_{j=1}^{m} A'_j$$

wobei $A_i, A'_j \in \mathcal{F}_1$ und $A_i \cap A'_j = \emptyset \quad \forall i, j$.

Nun gilt:

$$B \cup B' = \bigcup_{k=1}^{m+n} C_k, \text{ wobei } C_k = \begin{cases} A_k, & k \in \{1, ..., n\}, \\ A'_{k-n}, & k \in \{n+1, ..., m\} \end{cases}$$

1. Ein nicht σ-additiver Inhalt

$\mathbb{P}$ ist additiv:

$$\mathbb{P}(B \cup B') = \mathbb{P}(\bigcup_k C_k) = \sum_k \mathbb{P}(C_k) = \sum_{i,j} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A'_j) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B')$$

Aber $\mathbb{P}$ ist nicht σ-additiv:

- Für $\{r\} \in \mathcal{F}_2$ gilt: $\mathbb{P}(\{r\}) = 0$.
- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i\}$ (Ω abzählbare Menge)

Somit gilt:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \neq 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{r_i\})$$

2. Gegenbeispiel: $\mathbb{P}_1|_{\mathcal{C}} = \mathbb{P}_2|_{\mathcal{C}} \not\Rightarrow \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$

Motivation

Ω:	Menge aller Elementarereignisse
$\tilde{\mathcal{C}}$:	Klasse von Ereignissen, sodass $A, B \in \tilde{\mathcal{C}} \Rightarrow A \cap B \in \tilde{\mathcal{C}}$
$\mathcal{F} = \sigma(\tilde{\mathcal{C}})$:	Die von $\tilde{\mathcal{C}}$ erzeugte σ-Algebra

Betrachte $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$, zwei W-Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$.

Es gilt (Breiman 1968):

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2 \text{ auf } \tilde{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2 \text{ auf } \mathcal{F}$$

2. $\mathbb{P}_1|_\mathcal{C} = \mathbb{P}_2|_\mathcal{C} \not\Rightarrow \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned} \Omega = &\quad \{a, b, c, d\} \\ \mathcal{F} = &\quad \mathcal{P}(\Omega) \\ \mathcal{C} = &\quad \{a \cup b, a \cup c, d \cup b, d \cup c\} \end{aligned}$$

Definition für die W-Maße $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$:

$$\mathbb{P}_1(a) = \mathbb{P}_1(d) = \mathbb{P}_2(b) = \mathbb{P}_2(c) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}_1(b) = \mathbb{P}_1(c) = \mathbb{P}_2(a) = \mathbb{P}_2(d) = \frac{1}{3}$$

Damit gilt $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ auf $\mathcal{C}$, z.B. $\mathbb{P}_1(a \cup b) = \mathbb{P}_2(a \cup b)$.

Aber: Gleichheit nicht für alle Elemente von $\mathcal{F}$ erfüllt.
$\mathbb{P}_1(a) \neq \mathbb{P}_2(a)$, $\mathbb{P}_1(b) \neq \mathbb{P}_2(b)$ etc.

Grund: $\mathcal{C}$ nicht abgeschlossen gegenüber dem Schnitt

Motivation: Das Lemma von Borel-Cantelli

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: W-Raum
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: Folge von Ereignissen aus $\mathcal{F}$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty, \\ 1, & \text{falls } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \text{ und } \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ unabhängig.} \end{cases}$$

3. Zum Lemma von Borel-Cantelli

Gegeben:

- $\Omega = [0, 1]$
- $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$
- $\mathbb{P}$: Lebesgue-Maß
- $A_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$

Es gilt:

- $A_n \downarrow$ für $n \to \infty$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, sodass $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Aber:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

4. Umfassende und unabhängige Ereignismengen

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W-Raum
- $\{A_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ nicht leere Menge von Ereignissen ($\mathrm{I} \neq \emptyset$ abzählbar)

Unabhängigkeit von $\{A_i\}_{i \in \mathrm{I}}$

Für jedes $k \geq 2$ und jede Teilmenge $A_{i_1}, ..., A_{i_k}$ mit $i_1, ..., i_k \in \mathrm{I}$ gilt:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

$\{A_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ heißt umfassend („exhaustive“), wenn

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i) = 1$$

Kann die Menge $\{A_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ sowohl umfassend als auch unabhängig sein?

4. Umfassende und unabhängige Ereignismengen

i) Indexmenge $\mathtt{I}$ ist endlich

Sei $\{A_i\}_{i\in\mathtt{I}}$ eine Menge unabhängiger Ereignisse.

$\Rightarrow \{A_i^c\}_{i\in\mathtt{I}}$ unabhängig und

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathtt{I}} A_i) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i\in\mathtt{I}} A_i^c) = 1 - \prod_{i\in\mathtt{I}} \mathbb{P}(A_i^c)$$

- $\mathbb{P}(A_i^c) > 0 \quad \forall i \in \mathtt{I} \quad \Rightarrow \; 1 - \prod_{i\in\mathtt{I}} \mathbb{P}(A_i^c) < 1$

  $\Rightarrow \{A_i\}_{i\in\mathtt{I}}$ **nicht** umfassend.
- $\exists i \in \mathtt{I}$ mit $\mathbb{P}(A_i^c) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A_i) = 1$

Endliche, unabhängige Ereignismenge nur in diesem trivialen Fall umfassend.

4. Umfassende und unabhängige Ereignismengen

ii) Indexmenge $\mathrm{I} = \mathbb{N}$

Konstruktion von zwei verschiedenen Mengen von unabhängigen Ereignissen.

a) Unabhängige und umfassende Menge

- $X \sim U(0,1)$
- A_i: Ereignis, dass das i-te Bit einer Binärdarstellung von X null ist.
- $A_1, A_2, \ldots$ unabhängig
- $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2} \quad \forall i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty \quad \overset{B.-C.}{\Rightarrow} \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = 1$$

$\Rightarrow \{A_i\}_{i \geq 1}$ unabhängig **und** umfassend

4. Umfassende und unabhängige Ereignismengen

b)Unendliche, nicht umfassende Menge von unabhängigen Ereignissen

Betrachte $\{B_i\}_{i \geq 1}$ mit

$$B_i = \bigcap_{j=\frac{1}{2}i(i-1)+1}^{\frac{1}{2}i(i+1)} A_j$$

- $B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \cap A_3, \quad B_3 = A_4 \cap A_5 \cap A_6$ usw.
- $\mathbb{P}(B_i) = (\frac{1}{2})^i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) < \infty \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) < 1$$

$\Rightarrow \{B_i\}_{i \geq 1}$ unabhängig und **nicht** umfassend.

4. Umfassende und unabhängige Ereignismengen

Zu (1):

Es gilt: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1 - \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i^c)$

z.z.: $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i^c) > 0$

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i^c) = \exp\left(\log\left[\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i^c)\right]\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \log\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^i\right]\right)$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \log[1 - (\frac{1}{2})^i]$ nicht divergiert. Die Konvergenz folgt aus dem Quotientenkriterium und mit L'Hospital:

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\log[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]}{\log[1 - (\frac{1}{2})^n]} \right| \overset{L'H}{=} \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}} \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i^c) > 0 \quad \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) < 1$

5. Zusammenhang Austauschbarkeit und Unabhängigkeit

$\mathcal{F}_n = \{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{F}$, $n \geq 2$

k-Austauschbarkeit von $\mathcal{F}_n$

$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$ ist gleich für jede bel. Wahl von k Ereignissen,

$k \in \{1, ..., n-1\}$ und $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$

Vollständige Austauschbarkeit

$\mathcal{F}_n$ austauschbar für alle $k \in \{1, ..., n-1\}$, d.h.

$$\exists p_1, p_2, ..., p_{n-1} \in (0,1) : \quad \begin{array}{lcll} \mathbb{P}(A_j) & = & p_1 & \forall j \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) & = & p_2 & \forall i < j \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_l) & = & p_3 & \forall i < j < l \text{ etc.} \end{array}$$

5. Zusammenhang Austauschbarkeit und Unabhängigkeit

$\mathcal{F}_n$ stochastisch unabhängig, aber $\mathbb{P}(A_1), ..., \mathbb{P}(A_n)$ nicht alle gleich

$\Rightarrow \mathcal{F}_n$ **nicht** austauschbar

Beispiel zur Austauscheigenschaft

Gegeben: 192 Karten, wobei

- **110** Karten mit einem Tripel markiert sind:
  123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 je 11 Mal
- **30** Karten mit einem 4-Tupel: 1234, 1235, 1245, 1345, 2345 je 6 Mal
- **6** Karten mit einem 5-Tupel: 12345
- **46** Karten sind leer

Betrachte folgende fünf Ereignisse:

$$A_i = \{\text{zufällig gewählte Karte enthält die Zahl } i\} \qquad i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Schlussfolgerungen für diese Ereignisse

(a) Abhängig auf Stufen 2 und 3; unabhängig auf Stufen 4 und 5

(b) vollständig austauschbar

$\Rightarrow$ Unabhängigkeit und Austauschbarkeit stehen nicht in Bezug zueinander.