Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Seminar Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Pascal Beckedorf

12. November 2012

Gliederung

Gliederung

Unabhängigkeit vs. paarweise Unabhängigkeit

Äquivalente Definitionen von Unabhängigkeit

X_i Zufallsvariablen, $B_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

- $P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n)$
- $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$
- $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$
- $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$ f.s.

- $P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2)$

Unabhängigkeit vs. paarweise Unabhängigkeit

- (X, Y, Z) nehme die Werte $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ und $(1, 1, 1)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ an.
- $P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$
- $P(X = 1, Y = 1, Z = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$
  $= P(X = 1) \cdot P(Y = 1) \cdot P(Z = 1)$

$\Rightarrow$ paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig

Unabhängigkeit vs. paarweise Unabhängigkeit

- $n \geq 3$
- $A = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n a_i \text{ gerade } \}$
- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ nimmt Werte in A an mit

  $P(X = x) = 2^{-(n-1)} \qquad \forall x \in A$
- X_i nimmt Werte in $\{0,1\}$ an mit

  $P(X_i = x_i) = \frac{1}{2} \qquad \forall x_i \in \{0,1\}$

$\Rightarrow X_1, \ldots, X_n$ abhängig

Unabhängigkeit vs. paarweise Unabhängigkeit

- $X^{(j)} = (X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)$ mit $X \in A$ nimmt Werte in $\{0,1\}^{n-1}$ an mit

  $$P(X^{(j)} = x^{(j)}) = 2^{-(n-1)} \qquad \forall x^{(j)} \in \{0,1\}^{n-1}$$

- X_i nimmt Werte in $\{0,1\}$ an mit

  $$P(X_i = x_i) = \frac{1}{2} \qquad \forall x_i \in \{0,1\}$$

$\Rightarrow X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n$ unabhängig

Gliederung

Unabhängigkeit von X, Y vs. Unabhängigk. von X^2, Y^2

- $X_1, X_2 > 0$ unabhängig, absolut stetig
- Y von X_1 und X_2 unabhängig mit $P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$
- Betrachte $Z_1 := Y \cdot X_1$ und $Z_2 := Y \cdot X_2$.
- Z_1 und Z_2 sind abhängig.
- $Z_1^2 = X_1^2$ und $Z_2^2 = X_2^2$ sind unabhängig, da X_1 und X_2 unabhängig sind.

Gliederung

Unabhängigkeit und erzeugende Funktionen

Defintion erzeugende Funktion

- $X \geq 0$ ganzzahlige Zufallsvariable
  $\Rightarrow g_X(z) = E(z^X), z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$:
  erzeugende Funktion von X
- X, Y unabhängige Zufallsvariablen
  $\Rightarrow g_X(z) \cdot g_Y(z) = g_{X+Y}(z)$

Unabhängigkeit und erzeugende Funktionen

- X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X=1)=\frac{2}{3}$ und $P(X=0)=P(Y=0)=P(Y=1)=P(Y=2)=\frac{1}{3}$
- $Z := (X+Y) \mod 3$
- $P(Z=0)=P(Z=1)=P(Z=2)=\frac{1}{3}$
- $P(Y=0)\cdot P(Z=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\neq\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=$ $=P(Y=0)\cdot P(X=1)=P(Y=0,Z=1)$

$\Rightarrow$ nicht unabhängig

Unabhängigkeit und erzeugende Funktionen

- $Y + Z$ in Abhängigkeit von X und Y:

X \ Y	0	1	2
0	0	2	4
1	1	3	2

- $P(Y+Z=0) = P(Y+Z=4) = \frac{1}{9}$,
  $P(Y+Z=1) = P(Y+Z=3) = \frac{2}{9}$,
  $P(Y+Z=2) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Gleichung für erzeugende Funktionen gilt

Gliederung

Unabhängigkeit und Korrelation

Defintion Korrelationskoeffizient

- X, Y Zufallsvariablen mit $0 < \text{Var}X, \text{Var}Y < \infty$
  $\Rightarrow \varrho(X, Y)$ Korrelationskoeffizient mit
  $$\varrho(X, Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}X}\sqrt{\text{Var}Y}} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{\text{Var}X}\sqrt{\text{Var}Y}}$$
- X und Y unkorreliert
  $\Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0$
- X und Y unabhängig
  $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
  $\Rightarrow$ X und Y unkorreliert

Unabhängigkeit und Korrelation

- $X, Y \in \{-1, 0, 1\}$ Zufallsvariablen
- (X, Y) nehme die Werte $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ und $(0, -1)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ an.
- $E(X) = E(Y) = E(X \cdot Y) = 0$
- $P(X = 1, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$

$\Rightarrow$ unkorreliert, aber nicht unabhängig

Unabhängigkeit und Korrelation

- X_1 und X_2 haben die gemeinsame Dichtefunktion f mit
  $$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \pi^{-1}, & \text{wenn } x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
- $E(X_1) = E(X_2) = E(X_1 \cdot X_2) = 0$

Unabhängigkeit und Korrelation

- $f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 2\pi^{-1} \cdot \sqrt{1 - x_i^2}, & \text{wenn } x_i^2 < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

  $i = 1, 2$
- $x_1^2 + x_2^2 > 1, x_1^2 < 1, x_2^2 < 1$

  $\Rightarrow f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 0 \neq f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$
- $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$ f.s. gilt nicht

$\Rightarrow$ unkorreliert, aber nicht unabhängig

Gliederung

1. Unabhängigkeit vs. paarweise Unabhängigkeit
2. Unabhängigkeit von X, Y vs. Unabhängigkeit von X^2, Y^2
3. Unabhängigkeit und erzeugende Funktionen
4. Unabhängigkeit und Korrelation
5. Unabhängigkeit vs. bedingte Unabhängigkeit

Unabhängigkeit vs. bedingte Unabhängigkeit

Defintion bedingte Unabhängigkeit

$(\Omega, \mathcal{F}, P), A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0, P(C) > 0$

- bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- bedingte Unabhängigkeit: $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$

Unabhängigkeit vs. bedingte Unabhängigkeit

- fairer Würfel
- $A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2\}$
- $C = A \triangle B = \{1, 4, 6\}$

$\Rightarrow$ unabhängig, aber nicht bedingt unabhängig

Unabhängigkeit vs. bedingte Unabhängigkeit

- $n \geq 3, X_n \sim Ber(\frac{1}{2})$ unabhängig, diskret, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$
  $\Rightarrow S_n$ abhängig
- $S_2 = k$ mit $P(S_2 = k) > 0$

$\Rightarrow$ abhängig, aber bedingt unabhängig