Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Volker Michael Eberle

VARIOUS KINDS OF CONVERGENCES OF SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES

10 Dezember, 2012

Wahrscheinlichkeitsraum

Im Folgenden betrachten wir immer den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, die Zufallsvariable X und eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}$ und n$\rightarrow \infty$

Definition fast sicher

Definition

- $\{X_n\}$ konvergiert fast sicher (f.s) gegen X; n $\to \infty$ falls
- $\mathcal{P}[\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1.$
- Schreibweise: $X_n \xrightarrow{f.s} X$

Definition konvergent in Wahrscheinlichkeit

Definition

- Eine Folge $\{X_n\}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen X wenn:
- $\lim_{n \to \infty} \mathcal{P}[\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon] = 0.$
- Schreibweise: $X_n \xrightarrow{P} X$

Definition konvergent in Verteilung

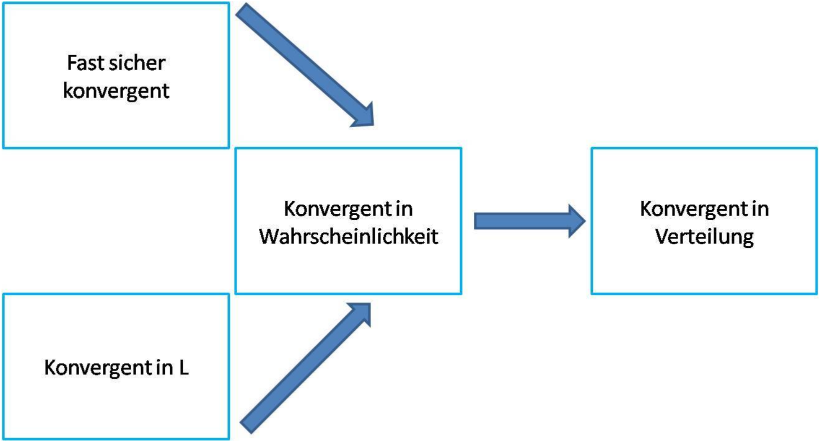
Definition

- Eine Folge $\{X_n\}$ ist konvergent in Verteilung, falls gilt
- $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ für jeden Stetigkeitspunkt von F.
- Schreibweise: $F_n \xrightarrow{d} F$ und $X_n \xrightarrow{d} X$.

Definition konvergent in $\mathcal{L}^r$

Definition

- $\{X_n\}$, X $\in \mathcal{L}^r$ und r$\geq$1 $\quad \mathbb{E}[|X|^r] < \infty$, $\mathbb{E}[|X_n|^r] < \infty$ dann konvergiert X_n im $\mathcal{L}^r$, falls
- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0.$
- Schreibweise: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$.


Fast sicher konvergent
Konvergent in Wahrscheinlichkeit
Konvergent in Verteilung
Konvergent in L

Beispiel I

Beispiel

Beispiel Nr.1:

- $F(x)$ Verteilungsfunktion $x \epsilon \mathbb{R}^1$, stetig
- zwei Verteilungsfunktionen:

Beispiel I

Beispiel

Beispiel Nr.1:

- $F(x)$ Verteilungsfunktion $x \epsilon \mathbb{R}^1$, stetig
- zwei Verteilungsfunktionen:
- $F_n(x) = F(x+n), \quad G_n(x) = F(x+(-1)^n n)$
- $F_n(x) \to 1$, n$\to \infty \; \forall \; x \; \epsilon \; \mathbb{R}^1$

Beispiel I

Beispiel

Beispiel Nr.1:

- $F(x)$ Verteilungsfunktion $x \epsilon \mathbb{R}^1$, stetig
- zwei Verteilungsfunktionen:
- $F_n(x) = F(x+n), \quad G_n(x) = F(x+(-1)^n n)$
- $F_n(x) \to 1$, n$\to \infty \; \forall \; x \; \epsilon \; \mathbb{R}^1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 1 \Longrightarrow$ keine Verteilungsfunktion
- $G_{2n}(x) \to 1$, aber $G_{2n+1}(x) \to 0$, n$\to \infty$

Beispiel I

Beispiel

Beispiel Nr.1:

- $F(x)$ Verteilungsfunktion $x \in \mathbb{R}^1$, stetig
- zwei Verteilungsfunktionen:
- $F_n(x) = F(x+n), \quad G_n(x) = F(x+(-1)^n n)$
- $F_n(x) \to 1$, n$\to \infty \ \forall \ x \in \mathbb{R}^1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 1 \Longrightarrow$ keine Verteilungsfunktion
- $G_{2n}(x) \to 1$, aber $G_{2n+1}(x) \to 0$, n$\to \infty$
- Also konvergiert G_n nicht!

Beispiel II

Beispiel

Beispiel Nr.2:

- Sei X eine Bernoullivariable:$\mathcal{P}(X = 1) = \mathcal{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- X_n ist eine Folge von Zufallsvariablen $X_n = X$

Beispiel II

Beispiel

Beispiel Nr.2:

- Sei X eine Bernoullivariable:$\mathcal{P}(X = 1) = \mathcal{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- X_n ist eine Folge von Zufallsvariablen $X_n = X$
- Dann gilt: $X_n \xrightarrow{d} X$, n$\rightarrow \infty$
- Definiere: $Y = 1 - X$. $\Rightarrow X_n \xrightarrow{d} Y$

Beispiel II

Beispiel

Beispiel Nr.2:

- Sei X eine Bernoullivariable:$\mathcal{P}(X = 1) = \mathcal{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- X_n ist eine Folge von Zufallsvariablen $X_n = X$
- Dann gilt: $X_n \xrightarrow{d} X$, n$\rightarrow \infty$
- Definiere: $Y = 1 - X$. $\Rightarrow X_n \xrightarrow{d} Y$
- X_n konvergieren nur in Verteilung gegen Y da: $|X_n - Y| = 1$
- $\Longrightarrow \mathcal{P}[|X_n - Y| > \varepsilon] \nrightarrow 0$

Beispiel III

Beispiel

Beispiel Nr.3:

- eine Folge $\{X_n,\ n \geq 1\}$ unabhängiger Zufallsvariablen
- $\mathcal{P}[X_n = 1] = \frac{1}{n}$, $\mathcal{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Beispiel III

Beispiel

Beispiel Nr.3:

- eine Folge $\{X_n, \text{n}\geq 1\}$ unabhängiger Zufallsvariablen
- $\mathcal{P}[X_n = 1] = \frac{1}{n}$, $\mathcal{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$, n$\geq$1.
- $X_n \xrightarrow{P} 0$, aber $X_n \xrightarrow{f.s} 0$ nicht erfüllt ist.

Frage zu konvergent in $\mathcal{L}^r$

Sei $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^s} X \quad 0 < s < r$
Gilt dann:
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$?

Beispiel IV

Beispiel

Beispiel Nr.4:

- $\mathcal{P}[X_n = n] = n^{-(r+s)/2} = 1 - \mathcal{P}[X_n = 0], \quad \text{n} \geq 1$
- $\mathbb{E}[X_n^s] = n^{(s-r)/2} \to 0$

Beispiel IV

Beispiel

Beispiel Nr.4:

- $\mathcal{P}[X_n = n] = n^{-(r+s)/2} = 1 - \mathcal{P}[X_n = 0], \quad \text{n} \geq 1$
- $\mathbb{E}[X_n^s] = n^{(s-r)/2} \to 0$
- $\mathbb{E}[X_n^r] = n^{(r-s)/2} \to \infty$
- D.h. konvergent in $\mathcal{L}^s$ impliziert nicht $\mathcal{L}^r$!

Beispiel V

Beispiel

Beispiel Nr.5:

- X_n sei eine Zufallsvariable
- $\mathcal{P}[X_n = e^n] = \frac{1}{n}$, $\mathcal{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$
- $\mathcal{P}[|X_n| < \varepsilon] = \mathcal{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ für n$\to \infty$

Beispiel V

Beispiel

Beispiel Nr.5:

- X_n sei eine Zufallsvariable
- $\mathcal{P}[X_n = e^n] = \frac{1}{n}$, $\mathcal{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$
- $\mathcal{P}[|X_n| < \varepsilon] = \mathcal{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ für n$\to \infty$
- aber $\mathbb{E}[X_n^r] = e^{rn}\frac{1}{n} \to \infty$
- konvergent in Wahrscheinlichkeit aber nicht in $\mathcal{L}^r$.

Beispiel I

Impliziert konvergent im $\mathcal{L}^r$ Sinne fast sichere Konvergenz?

Beispiel VI

Beispiel

Beispiel Nr.6:

- X_n eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen
- $\mathcal{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^{1/4}}$, $\mathcal{P}[X_n = \pm 1] = \frac{1}{2n^{1/4}}$
- Dann gilt $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$, aber $X_n \xrightarrow{f.s} 0$ gilt nicht!

Definition II

Lemma

Seinen F,F_n Verteilungsfunktionen,so dass ihre Dichtefunktionen f,f_n exitieren.

- *falls $f_n \to f$, ($n \to \infty$) fast überall, $x \epsilon \mathbb{R}$ dann folgt*

$\Rightarrow F_n \to F$

Frage

Gilt auch die Gegenrichtung?

Beispiel

Sei

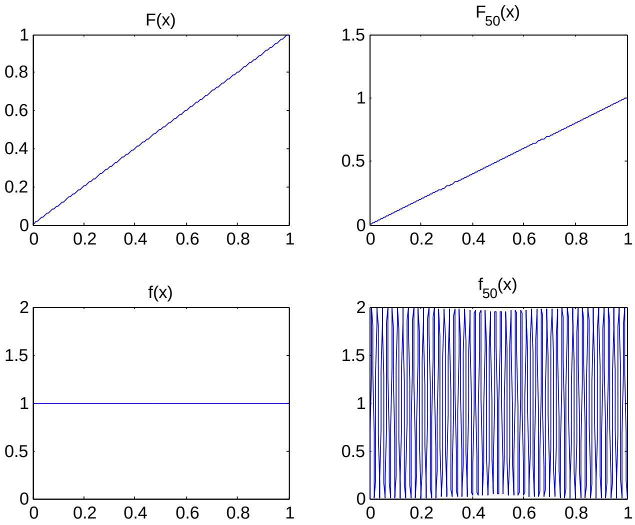
$$F_n = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \quad x \leq 0 \\ x\left(1 - \frac{sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right), & \textit{falls} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1, & \textit{falls} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

und

$$F = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \quad x \leq 0 \\ x, & \textit{falls} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1, & \textit{falls} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Dann gilt zwar $\mathrm{F}_n(x) \to \mathrm{F}$ aber $f_n(x) \nrightarrow f(x)$

Bilder zu Beispiel 7



vollständige Konvergenz

Definition

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathcal{P}[|X_m| > \varepsilon] = 0 \ \forall \ \varepsilon > 0$

D.h. aus vollständiger Konvergenz folgt f.s. Konvergenz.
Aber was gilt für die Gegenrichtung?

Beispiel

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ und $\mathcal{P}$ ist das Lebesgue-Maß

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \textit{falls} \quad \frac{1}{n} \leq \omega \leq 1. \end{cases}$$

Konvergiert nicht vollständig.

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit.